Corrigé de l'exercice 3.7

Irène Waldspurger

waldspurger@ceremade.dauphine.fr

Exercice 3.7

Soient E, F, G trois ensembles. Montrer l'égalité suivante :

$$E \setminus (F \cap G) = (E \setminus F) \cup (E \setminus G).$$

On procède par double inclusion.

- Montrons $E \setminus (F \cap G) \subset (E \setminus F) \cup (E \setminus G)$. Soit $x \in E \setminus (F \cap G)$ quelconque. D'après la définition de la différence ensembliste,

  $$x \in E \text{ et } x \notin F \cap G$$

  La deuxième propriété entraîne que $x \notin F$ ou $x \notin G$ (en effet, si $x \in F$ et $x \in G$, alors $x \in F \cap G$). On traite séparément ces deux cas.

  — Premier cas : $x \notin F$. Alors $x \in E$ et $x \notin F$, donc $x \in E \setminus F$ et

  $$x \in (E \setminus F) \cup (E \setminus G).$$

  — Deuxième cas : $x \notin G$. Alors $x \in E$ et $x \notin G$, donc $x \in E \setminus G$ et

  $$x \in (E \setminus F) \cup (E \setminus G).$$

  Dans tous les cas, on a bien montré $x \in (E \setminus F) \cup (E \setminus G)$.

- Montrons $(E \setminus F) \cup (E \setminus G) \subset E \setminus (F \cap G)$. Soit $x \in (E \setminus F) \cup (E \setminus G)$ quelconque. D'après la définition de l'union, $x \in E \setminus F$ ou $x \in E \setminus G$. Traitons séparément les deux cas.

  — Premier cas : $x \in E \setminus F$. Alors $x \in E$ et $x \notin F$. Comme $x \notin F$, $x \notin F \cap G$. Donc $x \in E$ et $x \notin F \cap G$: on a $x \in E \setminus (F \cap G)$.

  — Deuxième cas : $x \in E \setminus G$. Alors $x \in E$ et $x \notin G$. Comme $x \notin G$, $x \notin F \cap G$. Donc $x \in E$ et $x \notin F \cap G$: on a $x \in E \setminus (F \cap G)$.