Corrigé de l'exercice 4.8

Irène Waldspurger

waldspurger@ceremade.dauphine.fr

Exercice 4.8

On considère l'application

$$\begin{array}{rcccl} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & f(x) = \frac{2x}{1+x^2}. \end{array}$$

Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1;1]$.

Procédons par double inclusion.

- Montrons que $f(\mathbb{R}) \subset [-1;1]$.
  Pour cela, soit $y \in f(\mathbb{R})$ quelconque. Montrons que $y \in [-1;1]$, c'est-à-dire que $-1 \leq y \leq 1$.
  Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $y = f(x)$ (un tel x existe car $y \in f(\mathbb{R})$).
  On a

$$\begin{aligned} (-1 \leq y) &\iff (-1 \leq f(x)) \\ &\iff \left(-1 \leq \frac{2x}{1+x^2}\right) \\ &\iff \left(-(1+x^2) \leq 2x\right) \quad (\text{car } 1+x^2 > 0) \\ &\iff \left(0 \leq x^2 + 2x + 1\right) \\ &\iff \left(0 \leq (1+x)^2\right). \end{aligned}$$

  Comme la dernière proposition est vraie, la première l'est aussi : $-1 \leq y$.
  De même,

$$\begin{aligned} (y \leq 1) &\iff \left(\frac{2x}{1+x^2} \leq 1\right) \\ &\iff \left(2x \leq 1 + x^2\right) \quad (\text{car } 1+x^2 > 0) \\ &\iff \left(0 \leq (1-x)^2\right). \end{aligned}$$

  Comme la dernière proposition est vraie, la première l'est aussi : $y \leq 1$.
  On a donc bien montré que $y \in [-1;1]$.
- Montrons que $[-1;1] \subset f(\mathbb{R})$.
  Soit $y \in [-1;1]$ quelconque. Montrons que $y \in f(\mathbb{R})$, c'est-à-dire qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = y$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}(f(x) = y) &\iff \left(\frac{2x}{1+x^2} = y\right) \\ &\iff \left(yx^2 - 2x + y = 0\right). \qquad (1)\end{aligned}$$

— Premier cas : $y = 0$. On pose $x = 0$. On a alors

$$yx^2 - 2x + y = 0$$

donc, d'après l'équivalence (1), $f(x) = y$.

— Deuxième cas : $y \neq 0$. On résout alors l'équation polynomiale $yx^2 - 2x + y = 0$ (où l'inconnue est x : ici, y est un réel fixé).
Son discriminant vaut $\Delta = (-2)^2 - 4y^2 = 4(1 - y^2)$. Comme y appartient à $[-1; 1]$, on a $y^2 \leq 1$ donc $\Delta \geq 0$. Ainsi, l'équation polynomiale $yx^2 - 2x + y$ a au moins une solution réelle. Choisissons x de sorte que x soit l'une des solutions : on pose

$$x = \frac{2 + \sqrt{\Delta}}{2y}.$$

Avec cette définition, $yx^2 - 2x + y = 0$ donc, d'après l'équivalence (1), $f(x) = y$.

Dans chaque cas, on a donc bien montré qu'il existait $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = y$, ce qui conclut.

2. Donner l'image réciproque par f de $[0; 1]$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. C'est un élément de $f^{-1}([0; 1])$ si et seulement si $f(x) \in [0; 1]$, c'est-à-dire si et seulement si $0 \leq f(x) \leq 1$. Déterminons donc tous les réels x tels que

$$0 \leq f(x) \leq 1.$$

Tous les réels x vérifient l'inégalité $f(x) \leq 1$: on l'a vu à la question 1. Cherchons donc les réels x pour lesquels $0 \leq f(x)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}(0 \leq f(x)) &\iff \left(0 \leq \frac{2x}{1+x^2}\right) \\ &\iff (0 \leq 2x) \quad \text{(car } 1 + x^2 \text{ est strictement positif)} \\ &\iff (0 \leq x).\end{aligned}$$

Ainsi, les réels x pour lesquels $0 \leq f(x)$ sont exactement les éléments de $\mathbb{R}^+$.
Conclusion : les réels x vérifiant $f(x) \in [0; 1]$ sont exactement les éléments de $\mathbb{R}^+$. Ainsi, $f^{-1}([0; 1]) = \mathbb{R}^+$.