Corrigé de l'exercice 4.9

Irène Waldspurger

waldspurger@ceremade.dauphine.fr

Exercice 4.9

Considérons l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N}\times\mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ (n,p) & \mapsto & n+p. \end{array}$$

1. Déterminer les ensembles $f^{-1}(\{3\})$ et $f(\mathbb{N}\times\{2\})$.

Le premier ensemble demandé est $f^{-1}(\{3\}) = \{(n,p)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}, n+p=3\}$. Cherchons donc toutes les paires d'entiers naturels (n,p) telles que $n+p=3$, en procédant par analyse-synthèse.

- Analyse : soit $(n,p)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ telle que $n+p=3$. Comme $p\geq 0$, on a

$$3 = n+p \geq n.$$

  Donc n est un entier naturel inférieur ou égal à 3. Donc $n = 0,1,2$ ou 3.
  Comme $p = 3-n$, on a $(n,p) = (0,3)$ ou $(1,2)$ ou $(2,1)$ ou $(3,0)$.
- Synthèse : vérifions que les paires $(0,3),(1,2),(2,1),(3,0)$ satisfont la propriété voulue.
  Ce sont bien des paires d'entiers naturels. On a bien, de plus, $0+3 = 1+2 = 2+1 = 3+0 = 3$.

Bilan : les éléments (n,p) de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ tels que $n+p=3$ sont $(0,3),(1,2),(2,1),(3,0)$. Donc

$$f^{-1}(\{3\}) = \{(0,3),(1,2),(2,1),(3,0)\}.$$

Calculons maintenant $f(\mathbb{N}\times\{2\}) = \{f(n,2), n\in\mathbb{N}\} = \{n+2, n\in\mathbb{N}\}$.
On observe que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $n+2\geq 2$. En conséquent,

$$\{n+2, n\in\mathbb{N}\} \subset \{a\in\mathbb{N}, a\geq 2\}.$$

On peut d'autre part démontrer que

$$\{a\in\mathbb{N}, a\geq 2\} \subset \{n+2, n\in\mathbb{N}\}.$$

En effet, soit $a\in\mathbb{N}$ tel que $a\geq 2$, quelconque. Posons $n = a-2$. C'est un élément de $\mathbb{N}$, car $a\geq 2$. On a de plus $a = n+2$. Cela montre que $a\in\{n+2, n\in\mathbb{N}\}$.
Par double inclusion, on a donc démontré $\{n+2, n\in\mathbb{N}\} = \{a\in\mathbb{N}, a\geq 2\}$, c'est-à-dire

$$f(\mathbb{N}\times\{2\}) = \{a\in\mathbb{N}, a\geq 2\}.$$

2. Déterminer l'ensemble $f((2\mathbb{N}) \times (3\mathbb{N}))$ où, pour $a \in \mathbb{N}$, la notation $a\mathbb{N}$ désigne l'ensemble $\{ak, k \in \mathbb{N}\}$.

Nous allons montrer par double inclusion que

$$f((2\mathbb{N}) \times (3\mathbb{N})) = \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

- Montrons que $f((2\mathbb{N}) \times (3\mathbb{N})) \subset \mathbb{N} \setminus \{1\}$.
  Soit $y \in f((2\mathbb{N}) \times (3\mathbb{N}))$ quelconque. Montrons que $y \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.
  Soit $(n, p) \in (2\mathbb{N}) \times (3\mathbb{N})$ telle que $y = f(n, p)$.
  Soient $k \in \mathbb{N}$ et $l \in \mathbb{N}$ tels que
  $$n = 2k \quad \text{et} \quad p = 3l.$$
  (De tels k et l existent car $n \in 2\mathbb{N}$ et $p \in 3\mathbb{N}$.)
  On a donc
  $$y = f(n, p) = n + p = 2k + 3l.$$
  Puisque k et l sont des entiers positifs, y est également un entier positif, c'est-à-dire un élément de $\mathbb{N}$.
  Pour montrer que $y \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, il reste à montrer que $y \neq 1$.
  — Cas 1 : $k = 0$ et $l = 0$. Alors $y = 2k + 3l = 0 \neq 1$.
  — Cas 2 : $k = 0$ mais $l \neq 0$. Alors $l \geq 1$ et $y = 2k + 3l = 3l \geq 3$, donc $y \neq 1$.
  — Cas 3 : $k \neq 0$. Alors $y = 2k + 3l \geq 2k \geq 2$, donc $y \neq 1$.
  Dans tous les cas, on a que $y \neq 1$. Ainsi, $y \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.
- Montrons que $\mathbb{N} \setminus \{1\} \subset f((2\mathbb{N}) \times (3\mathbb{N}))$.
  Soit $y \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ quelconque. Montrons que $y \in f((2\mathbb{N}) \times (3\mathbb{N}))$, c'est-à-dire montrons qu'il existe $(n, p) \in (2\mathbb{N}) \times (3\mathbb{N})$ tel que $y = f(n, p)$.
  — Premier cas : y est pair.
  Soit alors $k \in \mathbb{Z}$ tel que $y = 2k$. L'entier k est positif car y est positif : $k \in \mathbb{N}$. Ainsi, $y = 2k \in 2\mathbb{N}$.
  Posons $n = y \in 2\mathbb{N}$ et $p = 0 = 3 \times 0 \in 3\mathbb{N}$. Alors $(n, p) \in (2\mathbb{N}) \times (3\mathbb{N})$ et
  $$f(n, p) = n + p = y.$$
  — Deuxième cas : y est impair.
  Dans ce cas, y est un entier positif impair et différent de 1. On en déduit que $y \geq 3$.
  Posons alors $n = y - 3$. C'est un entier. Il est positif car $y \geq 3$. Il est pair car y est impair. C'est donc un élément de $2\mathbb{N}$, par le même raisonnement que dans le premier cas.
  Posons également $p = 3 \in 3\mathbb{N}$. La paire (n, p) appartient à $(2\mathbb{N}) \times (3\mathbb{N})$ et
  $$f(n, p) = n + p = (y - 3) + 3 = y.$$
  Ainsi, quelle que soit la parité de y, il existe $(n, p) \in (2\mathbb{N}) \times (3\mathbb{N})$ telle que $y = f(n, p)$.

On a donc démontré

$$f((2\mathbb{N}) \times (3\mathbb{N})) = \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$