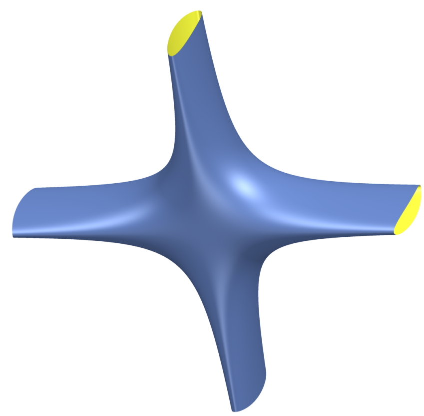
Devoir de géométrie différentielle



Le but de l'exercice est de décrire quelques propriétés de la surface

$$\mathcal{M} \stackrel{\text{déf}}{=} \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tq } x^2 + y^2z^2 = 1\right\}.$$

Les cinq questions sont indépendantes les unes des autres. Les questions 3.b) et 3.c) sont à ignorer si vous n'avez pas suivi de cours sur la connexité.

1. a) Montrer que $\mathcal{M}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$, de dimension 2 et de classe C^∞.

   b) Pour tout $(x,y,z) \in \mathcal{M}$, calculer $T_{(x,y,z)}\mathcal{M}$.
2. Montrer que $\mathcal{M}$ est invariante par les symétries

$$\begin{aligned} S_1 &: (x,y,z) \to (-x,y,z), \\ S_2 &: (x,y,z) \to (x,-y,z), \\ S_3 &: (x,y,z) \to (x,y,-z), \end{aligned}$$

   ainsi que par la rotation d'axe Ox et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
3. a) Soit a un paramètre réel. Calculer, en fonction de a, l'ensemble

$$\mathcal{M} \cap \{(x,y,z) \text{ tq } z = a\}.$$

   b) Dessiner l'ensemble obtenu pour $a = 0, a = \frac{1}{2}, a = 1, a = 2$.
4. Dans cette question, on démontre que $\mathcal{M}$ a quatre « branches », qui « partent dans les directions » données par les parties positives et négatives des axes Oy et Oz.

   a) Pour tout $\alpha > 1$, on définit

$$E_{1,\alpha} = \mathcal{M} \cap \{(x,y,z), y \geq \alpha\}, \quad E_{2,\alpha} = \mathcal{M} \cap \{(x,y,z), z \geq \alpha\},$$

$$E_{3,\alpha} = \mathcal{M} \cap \{(x,y,z), y \leq -\alpha\}, \quad E_{4,\alpha} = \mathcal{M} \cap \{(x,y,z), z \leq -\alpha\}.$$

Montrer que ces ensembles sont disjoints deux à deux.

b) Montrer que $E_{1,\alpha}$ est connexe par arcs pour tout $\alpha > 1$.
De même, $E_{2,\alpha}, E_{3,\alpha}$ et $E_{4,\alpha}$ sont connexes par arcs.

c) Montrer que, pour tout $\alpha > 1$, l'ensemble $\mathcal{M} \backslash]-\alpha;\alpha[^3$ a exactement quatre composantes connexes, qui sont $E_{1,\alpha}, E_{2,\alpha}, E_{3,\alpha}, E_{4,\alpha}$.

d) Soit $(p_n)_{n\geq 2}$ une suite quelconque d'éléments de $\mathbb{R}^3$ telle que

$$\forall n \geq 2, \quad p_n \in E_{1,n}.$$

Montrer que $\frac{p_n}{||p_n||_2} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} (0,1,0)$.

e) Énoncer une propriété similaire lorsqu'on remplace $E_{1,n}$ par $E_{2,n}, E_{3,n}$ ou $E_{4,n}$.

5. On définit la *sphère à quatre trous* par :

$$\mathcal{S} \overset{déf}{=} \mathbb{S}^2 \setminus \{(0,-1,0),(0,1,0),(0,0,-1),(0,0,1)\}.$$

a) Montrer que $\mathcal{S}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$, de dimension 2 et de classe C^∞.

On va montrer que $\mathcal{M}$ et $\mathcal{S}$ sont difféomorphes. Définissons

$$\begin{array}{rccc} \phi: & \mathcal{M} & \to & \mathcal{S} \\ & (x,y,z) & \to & \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right). \end{array}$$

b) Montrer que ϕ est bien définie (c'est-à-dire que, pour tout $(x,y,z) \in \mathcal{M}$, $\sqrt{x^2+y^2+z^2} \neq 0$ et $\phi(x,y,z)$ appartient à $\mathcal{S}$).

c) Montrer que ϕ est C^∞.

d) Montrer que ϕ est une bijection de $\mathcal{M}$ vers $\mathcal{S}$ et calculer sa réciproque.
Indication : fixer $(a,b,c) \in \mathcal{S}$. Montrer que, pour tout $(x,y,z) \in \mathcal{M}$, l'égalité $\phi(x,y,z) = (a,b,c)$ est équivalente à

$$\exists R \in \mathbb{R}_*^+ \text{ tel que } (x,y,z) = \left(\frac{a}{R}, \frac{b}{R}, \frac{c}{R}\right) \text{ et } R^4 - R^2a^2 - b^2c^2 = 0.$$

e) Montrer que ϕ est un C^∞-difféomorphisme de $\mathcal{M}$ vers $\mathcal{S}$.

La représentation 3D de $\mathcal{M}$ a été obtenue à l'aide du programme SURFER :
`https://www.imaginary.org/fr/program/surfer`.