Devoir de géométrie différentielle

Corrigé

Correction

1.a) Définissons

$$g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \to & x^2+y^2z^2-1. \end{array}$$

C'est une application polynomiale, donc de classe C^∞.
Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,

$$dg(x,y,z) = \Big((h_1,h_2,h_3) \to 2(xh_1 + yz^2h_2 + y^2zh_3)\Big).$$

Cette application est nulle si et seulement si $x = yz^2 = y^2z = 0$, c'est-à-dire $x = y = 0$ ou $x = z = 0$. Pour tout $(x,y,z) \in g^{-1}(\{0\})$, il est impossible que $x = y = 0$ ou $x = z = 0$ (sinon $x^2+y^2z^2-1 = -1 \neq 0$) donc $dg(x,y,z)$ est non-nulle. Comme $dg(x,y,z)$ est à images dans $\mathbb{R}$, elle est surjective. Ainsi, g est une submersion sur $g^{-1}(\{0\})$ et $\mathcal{M} = g^{-1}(\{0\})$ est une variété de dimension $3-1=2$ et de classe C^∞.

b) Définissons g comme précédemment. Pour tout $(x,y,z) \in \mathcal{M}$,

$$\begin{aligned} T_{(x,y,z)}\mathcal{M} &= \mathrm{Ker}(dg(x,y,z)) \\ &= \{(h_1,h_2,h_3) \in \mathbb{R}^3, xh_1 + yz^2h_2 + y^2zh_3 = 0\} \\ &= \{(x, yz^2, y^2z)\}^\perp. \end{aligned}$$

2. Pour tout $(x,y,z) \in \mathcal{M}$, $S_1(x,y,z) \in \mathcal{M}$ car $(-x)^2 + y^2z^2 = x^2+y^2z^2 = 1$. Ainsi, $S_1(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}$. De plus, $S_1 \circ S_1 = I_3$ donc $\mathcal{M} = S_1(S_1(\mathcal{M})) \subset S_1(\mathcal{M})$. Cela entraîne $S_1(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$.
Le raisonnement est identique pour S_2 et S_3.
Notons $R : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \to (x,-z,y) \in \mathbb{R}^3$ la rotation d'axe Ox et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Pour tout $(x,y,z) \in \mathcal{M}$, $R(x,y,z) \in \mathcal{M}$ car $x^2 + (-z)^2y^2 = x^2+y^2z^2 = 1$.

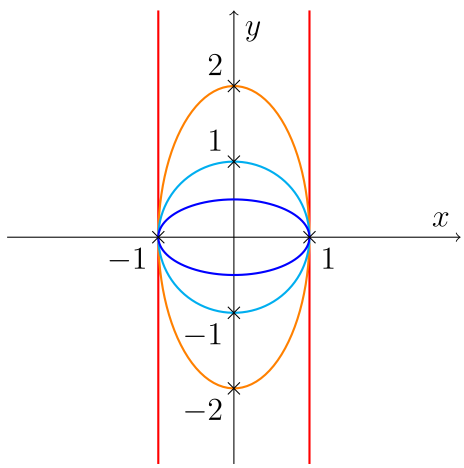
Ainsi, $R(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}$. De plus, pour tout $(x,y,z) \in \mathcal{M}$, $(x,y,z) = R(x,z,-y)$ et $(x,z,-y) \in \mathcal{M}$ (puisque $x^2+z^2(-y)^2 = x^2+y^2z^2 = 1$). Donc $\mathcal{M} \subset R(\mathcal{M})$. Cela entraîne $R(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$.

3.a)

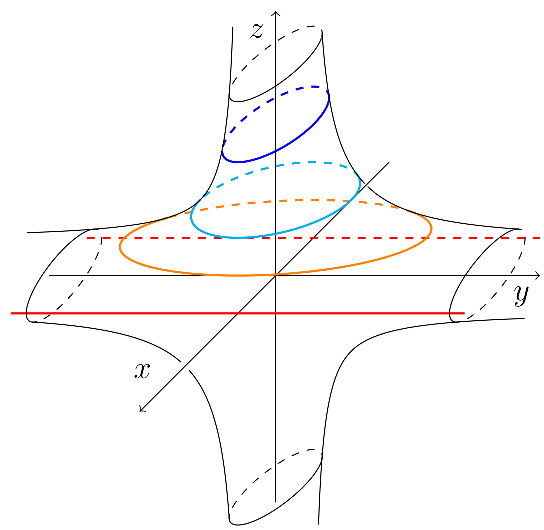
$$\mathcal{M} \cap \{(x,y,z) \text{ tq } z = a\} = \{(x,y,a) \in \mathbb{R}^3, x^2 + (ay)^2 = 1\}.$$

Si $a = 0$, il s'agit de $\{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3, x = \pm 1\} = (\{-1\} \times \mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\{1\} \times \mathbb{R} \times \{0\})$; c'est l'union de deux droites. Si $a \neq 0$, il s'agit d'une ellipse.

b)



(a) Les ensembles ($a = 0$ en rouge, $a = 1/2$ en orange, $a = 1$ en bleu clair et $a = 2$ en bleu) dans le plan (x,y).



(b) Les mêmes ensembles, visualisés en trois dimensions.

4.a) Soit $\alpha > 1$ fixé. Les ensembles $E_{1,\alpha}$ et $E_{3,\alpha}$ sont disjoints car, pour tout (x,y,z), il est impossible d'avoir $0 < \alpha \leq y \leq -\alpha < 0$. De même, $E_{2,\alpha}$ et $E_{4,\alpha}$ sont disjoints.

De plus, pour tout $(x,y,z) \in E_{1,\alpha} \cup E_{3,\alpha}$, on a $|y| \geq \alpha$, d'où $y^2 \geq \alpha^2$ et

$$z^2 = \frac{1-x^2}{y^2} \leq \frac{1}{y^2} \leq \frac{1}{\alpha^2}.$$

Ainsi, $|z| \leq \frac{1}{\alpha} < \alpha$ donc $(x,y,z) \notin E_{2,\alpha} \cup E_{4,\alpha}$. Cela montre que

$$(E_{1,\alpha} \cup E_{3,\alpha}) \cap (E_{2,\alpha} \cup E_{4,\alpha}) = \emptyset.$$

En particulier, $E_{1,\alpha}$ est disjoint de $E_{2,\alpha}$ et $E_{4,\alpha}$; $E_{3,\alpha}$ de même.

b) Soit $\alpha > 1$ fixé. Soient (x, y, z) et (x', y', z') deux points de $E_{1,\alpha}$. Montrons qu'il existe un chemin continu dans $E_{1,\alpha}$ qui relie (x, y, z) et (x', y', z'). Pour cela, il suffit de montrer les trois propriétés suivantes :

1. (x, y, z) peut être relié à $(1, y, 0)$ par un chemin continu de $E_{1,\alpha}$;
2. $(1, y, 0)$ peut être relié à $(1, y', 0)$ par un chemin continu de $E_{1,\alpha}$;
3. $(1, y', 0)$ peut être relié à (x', y', z') par un chemin continu de $E_{1,\alpha}$.

Pour la première propriété, définissons

$$\gamma_1 : t \in [0; 1] \to \left((1-t)x + t, y, \frac{\text{signe}(z)\sqrt{1 - ((1-t)x+t)^2}}{y} \right).$$

Cette fonction est bien définie : puisque $(x, y, z) \in \mathcal{M}$, on a $|x| \leq 1$, d'où $-1 \leq (1-t)x + t \leq 1$ pour tout t, donc $1 - ((1-t)x+t)^2 \geq 0$. Elle est continue comme composée de fonctions continues. Elle est à images dans $\mathcal{M}$: pour tout t,

$$\begin{aligned} &((1-t)x+t)^2 + y^2 \left(\frac{\text{signe}(z)\sqrt{1 - ((1-t)x+t)^2}}{y} \right)^2 \\ &\qquad = ((1-t)x+t)^2 + 1 - ((1-t)x+t)^2 = 1. \end{aligned}$$

Comme $y \geq \alpha$, elle est même à images dans $E_{1,\alpha}$. Enfin,

$$\begin{aligned} \gamma_1(0) &= \left(x, y, \frac{\text{signe}(z)\sqrt{1-x^2}}{y} \right) \\ &= \left(x, y, \frac{\text{signe}(z)\sqrt{y^2 z^2}}{y} \right) \\ &= \left(x, y, \frac{\text{signe}(z) y |z|}{y} \right) = (x, y, z) \end{aligned}$$

et

$$\gamma_1(1) = (1, y, 0).$$

(Pour dire que $\sqrt{y^2 z^2} = y|z|$, on a utilisé le fait que $y \geq \alpha > 0$.)
Cela démontre la première propriété.

La troisième propriété se démontre de manière identique, en considérant le chemin

$$\gamma_3 : t \in [0;1] \to \left((1-t) + tx', y', \frac{\text{signe}(z')\sqrt{1-((1-t)+tx')^2}}{y'} \right).$$

Enfin, pour la deuxième propriété, on définit

$$\gamma_2 : t \in [0;1] \to (1, (1-t)y + ty', 0).$$

C'est une fonction continue. Elle est à images dans $E_{1,\alpha}$: pour tout $t \in [0;1]$,

$$1^2 + ((1-t)y + ty')^2 \times 0^2 = 1$$

et $(1-t)y + ty' \geq (1-t)\alpha + t\alpha = \alpha$. De plus, $\gamma_2(0) = (1, y, 0)$ et $\gamma_2(1) = (1, y', 0)$.

c) Soit $\alpha > 1$ fixé. On remarque d'abord que

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}\backslash]-\alpha;\alpha[^3 &= \{(x,y,z) \in \mathcal{M}, |x| \geq \alpha \text{ ou } |y| \geq \alpha \text{ ou } |z| \geq \alpha\} \\
&= \{(x,y,z) \in \mathcal{M}, |y| \geq \alpha \text{ ou } |z| \geq \alpha\} \\
&\qquad\qquad (\text{car } x^2 + y^2z^2 = 1 \Rightarrow |x| \leq 1 < \alpha) \\
&= \{(x,y,z) \in \mathcal{M}, y \geq \alpha \text{ ou } y \leq -\alpha \text{ ou } z \geq \alpha \text{ ou } z \leq -\alpha\} \\
&= E_{1,\alpha} \cup E_{2,\alpha} \cup E_{3,\alpha} \cup E_{4,\alpha}.
\end{aligned}$$

Montrons maintenant que, pour tout $i \leq 4$, $E_{i,\alpha}$ est une composante connexe de $\mathcal{M}\backslash]-\alpha;\alpha[^3$. Traitons le cas $i = 1$; les trois autres sont identiques.
Rappelons qu'une composante connexe d'un ensemble est un sous-ensemble connexe maximal (c'est-à-dire qui n'est inclus dans aucun autre sous-ensemble connexe que lui-même). On a déjà vu que $E_{1,\alpha}$ était connexe (la connexité par arcs implique la connexité). Montrons qu'il est maximal. Soit $A \subset \mathcal{M}\backslash]-\alpha;\alpha[^3$ un sous-ensemble connexe. Supposons que $E_{1,\alpha} \subset A$ et montrons que $E_{1,\alpha} = A$.
L'ensemble $E_{1,\alpha}$ est fermé dans $\mathbb{R}^3$ (c'est l'intersection de $\mathcal{M}$, qui est fermé car il s'agit de l'ensemble des points d'annulation d'une fonction continue définie sur $\mathbb{R}^3$, et d'un demi-espace fermé) ; il est donc aussi fermé dans A.
De plus, $E_{2,\alpha} \cup E_{3,\alpha} \cup E_{4,\alpha}$ est également fermé (c'est l'union de trois fermés) donc $E_{1,\alpha} = (\mathcal{M}\backslash]-\alpha;\alpha[^3) \setminus (E_{2,\alpha} \cup E_{3,\alpha} \cup E_{4,\alpha})$ est ouvert dans $\mathcal{M}\backslash]-\alpha;\alpha[^3$. C'est donc aussi un ouvert de A.

Puisque A est connexe, il n'a que deux sous-ensembles ouverts et fermés : l'ensemble vide et A lui-même. Or $E_{1,\alpha} \neq \emptyset$ donc $E_{1,\alpha} = A$.
Cela achève de montrer que $E_{1,\alpha}$ (et, de même, $E_{2,\alpha}, E_{3,\alpha}, E_{4,\alpha}$) est une composante connexe de $\mathcal{M}\backslash]-\alpha;\alpha[^3$. Comme l'union des $E_{i,\alpha}$ est égale à $\mathcal{M}\backslash]-\alpha;\alpha[^3$, il n'y a pas d'autre composante connexe.

d) Pour tout $n \geq 2$, notons $p_n = (x_n, y_n, z_n)$. Pour tout n, $y_n \geq n$, $|x_n| \leq 1$ et $|z_n| \leq \frac{1}{|y_n|} \leq \frac{1}{n}$ donc

$$0 \leq \left|\frac{x_n}{y_n}\right| \leq \frac{1}{n} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \quad 0 \leq \left|\frac{z_n}{y_n}\right| \leq \frac{1}{n^2} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Par encadrement, cela montre que $\frac{x_n}{y_n} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\frac{z_n}{y_n} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
On en déduit

$$\begin{aligned}
\frac{p_n}{||p_n||_2} &= \left(\frac{x_n}{\sqrt{x_n^2+y_n^2+z_n^2}}, \frac{y_n}{\sqrt{x_n^2+y_n^2+z_n^2}}, \frac{z_n}{\sqrt{x_n^2+y_n^2+z_n^2}}\right) \\
&= \left(\frac{x_n}{y_n}\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x_n}{y_n}\right)^2+1+\left(\frac{z_n}{y_n}\right)^2}},\right. \\
&\qquad \left.\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x_n}{y_n}\right)^2+1+\left(\frac{z_n}{y_n}\right)^2}}, \frac{z_n}{y_n}\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x_n}{y_n}\right)^2+1+\left(\frac{z_n}{y_n}\right)^2}}\right) \\
&\overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} (0,1,0).
\end{aligned}$$

e) Le même principe de raisonnement montre les propriétés suivantes :
- si $(p_n)_{n\geq 2}$ est une suite d'éléments de $\mathbb{R}^3$ telle que, pour tout $n \geq 2$, $p_n \in E_{2,n}$, alors $\frac{p_n}{||p_n||} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} (0,0,1)$;
- si $(p_n)_{n\geq 2}$ est une suite d'éléments de $\mathbb{R}^3$ telle que, pour tout $n \geq 2$, $p_n \in E_{3,n}$, alors $\frac{p_n}{||p_n||} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} (0,-1,0)$;
- si $(p_n)_{n\geq 2}$ est une suite d'éléments de $\mathbb{R}^3$ telle que, pour tout $n \geq 2$, $p_n \in E_{4,n}$, alors $\frac{p_n}{||p_n||} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} (0,0,-1)$.

5.a) Notons $H = \{(0,-1,0),(0,1,0),(0,0,-1),(0,0,1)\}$.
L'ensemble $\mathcal{S}$ est un ouvert de $\mathbb{S}^2$, qui est une sous-variété C^∞ de dimension 2 de $\mathbb{R}^3$ (c'est l'intersection de $\mathbb{S}^2$ et de l'ouvert $\mathbb{R}^3 - H$). Or tout ouvert

d'une sous-variété est une sous-variété de mêmes dimension et régularité. [1]
Donc $\mathcal{S}$ est une sous-variété C^∞ de dimension 2 de $\mathbb{R}^3$.

b) Comme $(0,0,0) \notin \mathcal{M}$, on a $\sqrt{x^2+y^2+z^2} > 0$ pour tout $(x,y,z) \in \mathcal{M}$.
Soit $(x,y,z) \in \mathcal{M}$. Montrons que $\phi(x,y,z) \in \mathcal{S}$.
On remarque tout d'abord que

$$||\phi(x,y,z)||_2 = \frac{||(x,y,z)||_2}{||(x,y,z)||_2} = 1.$$

Donc $\phi(x,y,z) \in \mathbb{S}^2$.
Montrons maintenant que $\phi(x,y,z) \notin H$. Raisonnons par l'absurde et supposons que $\phi(x,y,z) \in H$, par exemple que $\phi(x,y,z) = (0,1,0)$ (les trois autres cas se traitent de manière identique). Alors

$$(0,1,0) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$$

donc $x = z = 0$. Ainsi, $x^2 + y^2z^2 = 0 \neq 1$. C'est absurde.
Donc $\phi(x,y,z) \in \mathbb{S}^2 \setminus H = \mathcal{S}$.

c) Les applications coordonnées $(x,y,z) \in \mathcal{M} \to x \in \mathbb{R}, (x,y,z) \in \mathcal{M} \to y \in \mathbb{R}, (x,y,z) \in \mathcal{M} \to z \in \mathbb{R}$ sont C^∞. L'application $(x,y,z) \in \mathcal{M} \to x^2+y^2+z^2$ est donc C^∞ : c'est une somme de produits de fonctions C^∞. Comme la racine carrée est C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $x^2+y^2+z^2 \in \mathbb{R}_+^*$ pour tout $(x,y,z) \in \mathcal{M}$, l'application $(x,y,z) \in \mathcal{M} \to \sqrt{x^2+y^2+z^2} \in \mathbb{R}$ est aussi C^∞. On en déduit que chaque composante de ϕ est un quotient de fonctions C^∞ sur $\mathcal{M}$: c'est une fonction C^∞.
Ainsi, ϕ est une fonction C^∞ de $\mathcal{M}$ dans $\mathbb{R}^3$. C'est donc également une fonction C^∞ de $\mathcal{M}$ vers $\mathcal{S}$.

d) Soient $(x,y,z) \in \mathcal{M}$ et $(a,b,c) \in \mathcal{S}$. Montrons que $\phi(x,y,z) = (a,b,c)$ si et seulement s'il existe $R \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$(x,y,z) = \left(\frac{a}{R}, \frac{b}{R}, \frac{c}{R}\right) \quad \text{et} \quad R^4 - R^2a^2 - b^2c^2 = 0.$$

---

1. Démonstration : soit $\mathcal{A}$ une sous-variété de classe C^k de $\mathbb{R}^n$, de dimension d, pour des entiers $k, n \geq 1, d \geq 0$. Soit $\mathcal{E}$ un ouvert de $\mathcal{A}$, c'est-à-dire l'intersection de $\mathcal{A}$ avec un certain ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$. Pour tout $x \in \mathcal{E}$, on a aussi $x \in \mathcal{A}$; comme $\mathcal{A}$ est une sous-variété, il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de x dans $\mathbb{R}^n$ et une application $g : \mathcal{V} \to \mathbb{R}^{n-d}$ de classe C^k qui est une submersion en x, telle que $\mathcal{V} \cap \mathcal{A} = g^{-1}(\{0\})$. considérons $\tilde{g}$ la restriction de g à $\mathcal{V} \cap \Omega$. C'est une application de classe C^k, qui est une submersion en x, et $\mathcal{V} \cap \Omega \cap \mathcal{E} = \mathcal{V} \cap \Omega \cap \mathcal{A} = \tilde{g}^{-1}(\{0\})$. Donc $\mathcal{E}$ vérifie la définition « submersion » d'une sous-variété au point x.

Commençons par supposer que $\phi(x,y,z)=(a,b,c)$. Posons $R=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}>0$. D'après la définition de ϕ, $(a,b,c)=(Rx,Ry,Rz)$ donc $(x,y,z)=\left(\frac{a}{R},\frac{b}{R},\frac{c}{R}\right)$. De plus,

$$1=x^2+y^2z^2=\frac{a^2}{R^2}+\frac{b^2c^2}{R^4},$$

ce qui implique $R^4-R^2a^2-b^2c^2=0$.
Réciproquement, supposons qu'il existe $R\in\mathbb{R}_+^*$ tel que $(x,y,z)=\left(\frac{a}{R},\frac{b}{R},\frac{c}{R}\right)$ et $R^4-R^2a^2-b^2c^2=0$. Alors

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{R}=\frac{1}{R},$$

donc $\phi(x,y,z)=(Rx,Ry,Rz)=(a,b,c)$.
Maintenant que nous avons démontré l'équivalence suggérée dans l'indication, montrons que ϕ est une bijection entre $\mathcal{M}$ et $\mathcal{S}$. Soit $(a,b,c)\in\mathcal{S}$. Remarquons que, pour tout $R>0$, on a l'égalité $R^4-R^2a^2-b^2c^2$ si et seulement si

$$R^2=\frac{a^2\pm\sqrt{a^4+4b^2c^2}}{2}.$$

Puisque $a^2-\sqrt{a^4+4b^2c^2}\leq 0$ et $R>0$, c'est équivalent à

$$R^2=\frac{a^2+\sqrt{a^4+4b^2c^2}}{2}\quad\overset{(R>0)}{\Longleftrightarrow}\quad R=\sqrt{\frac{a^2+\sqrt{a^4+4b^2c^2}}{2}}.$$

On en déduit que, pour tout $(x,y,z)\in\mathcal{M}$, si $\phi(x,y,z)=(a,b,c)$, alors

$$(x,y,z)=\left(\frac{a}{\sqrt{\frac{a^2+\sqrt{a^4+4b^2c^2}}{2}}},\frac{b}{\sqrt{\frac{a^2+\sqrt{a^4+4b^2c^2}}{2}}},\frac{c}{\sqrt{\frac{a^2+\sqrt{a^4+4b^2c^2}}{2}}}\right).$$

Le point (a,b,c) a donc au plus un antécédant par ϕ : ϕ est injective.
Posons maintenant $R=\sqrt{\frac{a^2+\sqrt{a^4+4b^2c^2}}{2}}$. C'est un réel strictement positif (en effet, (a,b,c) appartient à $\mathbb{S}^2\setminus H$ donc, si $a=0$, alors $b\neq 0$ et $c\neq 0$, donc $\sqrt{a^4+4b^2c^2}>0$). Posons

$$(x,y,z)=\left(\frac{a}{R},\frac{b}{R},\frac{c}{R}\right)$$

$$= \left(\frac{a}{\sqrt{\frac{a^2+\sqrt{a^4+4b^2c^2}}{2}}}, \frac{b}{\sqrt{\frac{a^2+\sqrt{a^4+4b^2c^2}}{2}}}, \frac{c}{\sqrt{\frac{a^2+\sqrt{a^4+4b^2c^2}}{2}}} \right).$$

C'est un élément de $\mathcal{M}$ (puisque $x^2 + y^2z^2 = \frac{a^2}{R^2} + \frac{b^2c^2}{R^4} = \frac{R^2a^2+b^2c^2}{R^4} = \frac{R^4}{R^4} = 1$). D'après l'équivalence précédemment démontrée, il vérifie $\phi(x,y,z) = (a,b,c)$. Le point (a,b,c) a donc un antécédant par ϕ : ϕ est surjective. Elle est donc bijective.

Le raisonnement que nous venons de faire nous a donné l'expression de $\phi^{-1}(a,b,c)$:

$$\phi^{-1}(a,b,c) = \left(\frac{a}{\sqrt{\frac{a^2+\sqrt{a^4+4b^2c^2}}{2}}}, \frac{b}{\sqrt{\frac{a^2+\sqrt{a^4+4b^2c^2}}{2}}}, \frac{c}{\sqrt{\frac{a^2+\sqrt{a^4+4b^2c^2}}{2}}} \right).$$

e) Nous avons déjà montré que ϕ était bijective et qu'elle était C^∞. Il reste à montrer que ϕ^{-1} est C^∞.

L'application $(a,b,c) \in \mathcal{S} \to a^4 + 4b^2c^2$ est de classe C^∞ (somme de produits de fonctions C^∞). On a vu à la question précédente qu'elle était à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. L'application $(a,b,c) \in \mathcal{S} \to \sqrt{a^4 + 4b^2c^2}$ est donc C^∞ par composition.

De même, $(a,b,c) \in \mathcal{S} \to \sqrt{\frac{a^2+\sqrt{a^4+4b^2c^2}}{2}}$ est C^∞.

Cela montre que les trois composantes de ϕ^{-1} sont des quotients de fonctions C^∞ sur $\mathcal{S}$ et donc qu'elles sont C^∞ sur $\mathcal{S}$. L'application ϕ^{-1} est donc C^∞ de $\mathcal{S}$ vers $\mathbb{R}^3$; elle est alors aussi C^∞ de $\mathcal{S}$ vers $\mathcal{M}$.