Devoir : le théorème de Cauchy-Lipschitz

Avant de commencer, il est conseillé de parcourir les rappels se trouvant à la dernière page.

Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, $U \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert et $f : I \times U \to \mathbb{R}^d$ une fonction. Soient $t_0 \in I, u_0 \in U$.
On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u'(t) & = & f(t, u(t)), \\ u(t_0) & = & u_0. \end{array} \right. \tag{Cauchy}$$

Nous allons démontrer le théorème de Cauchy-Lipschitz. On suppose que

— f est continue ;
— il existe des voisinages $H_I \subset I$ et $H_U \subset U$ de t_0 et u_0, et $C > 0$ tels que

$$||f(t,v) - f(t,v')||_2 \leq C||v - v'||_2, \quad \forall t \in H_I, v, v' \in H_U.$$

1. On commence par démontrer l'unicité locale de la solution de (Cauchy). Soient $u_1 : J_1 \to U$ et $u_2 : J_2 \to U$ deux solutions.
   a) Montrer qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $t \in [t_0; t_0 + \epsilon] \cap J_1 \cap J_2$, $||u_1'(t) - u_2'(t)||_2 \leq C||u_1(t) - u_2(t)||_2$.
   b) Pour ce ϵ, montrer que, pour tout $t \in [t_0; t_0 + \epsilon] \cap J_1 \cap J_2$,
   $$||u_1(t) - u_2(t)||_2 \leq C \int_{t_0}^{t} ||u_1(s) - u_2(s)||_2 ds.$$
   [Indication : utiliser l'égalité $u_1(t) - u_2(t) = u_1(t_0) - u_2(t_0) + \int_{t_0}^{t}(u_1'(s) - u_2'(s))ds$, ainsi que l'inégalité triangulaire pour les intégrales.]
   c) À l'aide du lemme de Gronwall, montrer que $u_1 = u_2$ sur $[t_0; t_0 + \epsilon] \cap J_1 \cap J_2$.
   d) Montrer qu'il existe $\epsilon' > 0$ tel que $u_1 = u_2$ sur $[t_0 - \epsilon'; t_0 + \epsilon'] \cap J_1 \cap J_2$.
2. Montrer qu'il existe un voisinage $H_I' \subset H_I$ de t_0, un voisinage $H_U' \subset H_U$ de u_0 et $M > 0$ tels que $||f(t,v)||_2 \leq M$ pour tous $t \in H_I', v \in H_U'$.
3. Démontrons l'existence. Soit $\epsilon > 0$ tel que $[t_0 - \epsilon; t_0 + \epsilon] \subset H_I'$ et $\bar{B}(u_0, M\epsilon) \subset H_U'$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $u_n : [t_0 - \epsilon; t_0 + \epsilon] \to U$ comme suit.
   — On pose $u_n(t_0) = u_0$.

— Pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$, si on a défini u_n sur $\left[t_0 - \frac{k}{n}\epsilon; t_0 + \frac{k}{n}\epsilon\right]$, on pose, pour tout $t \in \left]t_0 + \frac{k}{n}\epsilon; t_0 + \frac{k+1}{n}\epsilon\right]$,

$$u_n(t) = u_n\left(t_0 + \frac{k}{n}\epsilon\right) + \int_{t_0 + \frac{k}{n}\epsilon}^{t} f\left(s, u_n\left(t_0 + \frac{k}{n}\epsilon\right)\right) ds$$

et, pour tout $t \in \left[t_0 - \frac{k+1}{n}\epsilon; t_0 - \frac{k}{n}\epsilon\right[$,

$$u_n(t) = u_n\left(t_0 - \frac{k}{n}\epsilon\right) + \int_{t_0 - \frac{k}{n}\epsilon}^{t} f\left(s, u_n\left(t_0 - \frac{k}{n}\epsilon\right)\right) ds.$$

a) Pour tout n, montrer que u_n est bien définie, M-lipschitzienne, C^1 par morceaux et à valeurs dans $\bar{B}(u_0, M\epsilon)$.

b) Montrer que, pour tout $t \in [t_0 - \epsilon; t_0 + \epsilon]$ sauf en un nombre fini de valeurs,

$$||u_n'(t) - f(t, u_n(t))||_2 \leq \frac{CM\epsilon}{n}.$$

c) En déduire que, pour tous $n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in [t_0 - \epsilon; t_0 + \epsilon]$ sauf en un nombre fini de valeurs,

$$||u_{n_1}'(t) - u_{n_2}'(t)||_2 \leq CM\epsilon\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) + C||u_{n_1}(t) - u_{n_2}(t)||_2.$$

d) Montrer que, pour tous $n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [t_0 - \epsilon; t_0 + \epsilon]$,

$$||u_{n_1}(t) - u_{n_2}(t)||_2 \leq M\epsilon\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)\left(e^{C|t-t_0|} - 1\right).$$

[Indication : utiliser Gronwall, en raisonnant comme dans la question 1.]

e) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est de Cauchy dans $C^0\left([t_0 - \epsilon; t_0 + \epsilon], \bar{B}(u_0, M\epsilon)\right)$ muni de la distance uniforme.

f) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers une certaine fonction $u_\infty \in C^0\left([t_0 - \epsilon; t_0 + \epsilon], \bar{B}(u_0, M\epsilon)\right)$.

g) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [t_0 - \epsilon; t_0 + \epsilon]$,

$$\left|\left|u_n(t) - u_n(t_0) - \int_{t_0}^{t} f(s, u_n(s))ds\right|\right|_2 \leq \frac{CM\epsilon^2}{n}.$$

h) En déduire que, pour tout $t \in [t_0 - \epsilon; t_0 + \epsilon]$,

$$u_\infty(t) = u_\infty(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, u_\infty(s))ds,$$

puis que u_∞ est solution de (Cauchy).

Lemme de Gronwall
Soient $t_0, T \in \mathbb{R}$, avec $t_0 \leq T$. Soient $a, c, u \in C^0([t_0; T], \mathbb{R})$ telles que $a \geq 0$ et

$$u(t) \leq c(t) + \int_{t_0}^{t} a(s)u(s)ds, \quad \forall t \in [t_0; T].$$

Alors, pour tout $t \in [t_0; T]$,

$$u(t) \leq c(t) + \int_{t_0}^{t} e^{\int_s^t a(\tau)d\tau} a(s)c(s)ds.$$

Le lemme est vrai aussi si $T < t_0$, à condition de remplacer le segment « $[t_0; T]$ » par « $[T; t_0]$ » et d'échanger les bornes dans chaque intégrale.

Suite de Cauchy
Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'un espace métrique (X, d) est une *suite de Cauchy* si

$$\sup_{m\geq n} d(x_n, x_m) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Espaces complets
On dit qu'un espace métrique (X, d) est *complet* si toute suite d'éléments de X qui est de Cauchy est convergente.
Des exemples importants d'espaces complets sont :
— tous les espaces métriques compacts,
— l'ensemble $C_b^0(X, Y)$ des fonctions continues et bornées entre un espace métrique quelconque (X, d_X) et un espace métrique complet (Y, d_Y), muni de la distance uniforme d_{sup} :

$$d_{sup}(f, g) = \sup_{x\in X} d_Y(f(x), g(x)), \quad \forall f, g \in C_b^0(X, Y).$$