# Devoir : le théorème de Cauchy-Lipschitz

Corrigé

1.a) Soit $\epsilon > 0$ tel que $[t_0; t_0 + \epsilon] \subset H_I$ et

— pour tout $t \in [t_0; t_0 + \epsilon] \cap J_1$, $u_1(t) \in H_U$ ;

— pour tout $t \in [t_0; t_0 + \epsilon] \cap J_2$, $u_2(t) \in H_U$.

Un tel $\epsilon$ existe car $H_U$ est un voisinage de $u_1(t_0) = u_2(t_0) = u_0$ et $u_1, u_2$ sont continues.

Pour tout $t \in [t_0; t_0 + \epsilon] \cap J_1 \cap J_2$,

$$\begin{aligned} ||u_1'(t) - u_2'(t)||_2 &= ||f(t, u_1(t)) - f(t, u_2(t))||_2 \\ &\leq C||u_1(t) - u_2(t)||_2. \end{aligned}$$

Pour l'inégalité, on a utilisé le fait que $t \in H_I$ et $u_1(t), u_2(t) \in H_U$.

b) Soit $t \in [t_0; t_0 + \epsilon] \cap J_1 \cap J_2$ quelconque. Remarquons que, comme $[t_0; t_0 + \epsilon]$, $J_1$ et $J_2$ sont des intervalles, $[t_0; t] \subset [t_0; t_0 + \epsilon] \cap J_1 \cap J_2$.

Le théorème fondamental de l'analyse et l'inégalité triangulaire pour les intégrales nous permettent d'écrire

$$\begin{aligned} ||u_1(t) - u_2(t)||_2 &= \left|\left| u_1(t_0) - u_2(t_0) + \int_{t_0}^{t} (u_1'(s) - u_2'(s))ds \right|\right|_2 \\ &= \left|\left| \int_{t_0}^{t} (u_1'(s) - u_2'(s))ds \right|\right|_2 \quad \text{(car } u_1(t_0) = u_2(t_0) = u_0\text{)} \\ &\leq \int_{t_0}^{t} ||u_1'(s) - u_2'(s)||_2 ds. \end{aligned}$$

Pour tout $s \in [t_0; t]$, comme $s \in [t_0; t_0 + \epsilon] \cap J_1 \cap J_2$, on peut utiliser la question précédente pour dire que $||u_1'(s) - u_2'(s)||_2 \leq C||u_1(s) - u_2(s)||_2$. En conséquent,

$$||u_1(t) - u_2(t)||_2 \leq C \int_{t_0}^{t} ||u_1(s) - u_2(s)||_2 ds.$$

c) Posons $\phi : t \in [t_0; t_0+\epsilon] \cap J_1 \cap J_2 \to ||u_1(t) - u_2(t)||_2$. D'après la question précédente, on a, pour tout $t$,

$$\phi(t) \leq C \int_{t_0}^{t} \phi(s) ds,$$

c'est-à-dire que $\phi$ vérifie l'hypothèse du lemme de Gronwall, si on note $c$ la fonction nulle et $a$ la fonction constante de valeur $C$. Du lemme, on déduit alors que, pour tout $t \in [t_0; t_0+\epsilon] \cap J_1 \cap J_2$,

$$\phi(t) \leq 0 + \int_{t_0}^{t} e^{\int_s^t C d\tau} C \times 0 ds = 0.$$

Donc $\phi$ est nulle, ce qui entraîne que $u_1 - u_2$ est nulle (c'est-à-dire $u_1 = u_2$) sur $[t_0; t_0+\epsilon] \cap J_1 \cap J_2$.

d) De même qu'à la question a), on peut montrer qu'il existe $\tilde{\epsilon} > 0$ tel que, pour tout $t \in [t_0 - \tilde{\epsilon}; t_0] \cap J_1 \cap J_2$, $||u_1'(t) - u_2'(t)||_2 \leq C ||u_1(t) - u_2(t)||_2$. En raisonnant de manière identique à la question b), on en déduit que, pour tout $t \in [t_0 - \tilde{\epsilon}; t_0] \cap J_1 \cap J_2$,

$$||u_1(t) - u_2(t)||_2 \leq C \int_{t}^{t_0} ||u_1(s) - u_2(s)||_2 ds.$$

On peut ensuite appliquer le lemme de Gronwall, qui entraîne que $u_1 = u_2$ sur $[t_0 - \tilde{\epsilon}; t_0] \cap J_1 \cap J_2$.
En posant $\epsilon' = \min(\epsilon, \tilde{\epsilon})$, on a le résultat demandé.

2. Soit $\eta > 0$ tel que $[t_0 - \eta; t_0 + \eta] \subset H_I$ et $\bar{B}(u_0, \eta) \subset H_U$. La fonction $f$ est continue sur $[t_0 - \eta; t_0 + \eta] \times \bar{B}(u_0, \eta)$, qui est un ensemble compact. Elle est donc bornée (c'est-à-dire que sa norme est majorée). En notant $M$ un majorant de la norme et en définissant $H_I' = [t_0 - \eta; t_0 + \eta], H_U' = \bar{B}(u_0, \eta)$, on a la propriété demandée.

3.a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Nous allons démontrer par récurrence sur $k$ que, pour tout $k = 0, \ldots, n$, $u_n$ est bien définie, $M$-lipschitzienne et $C^1$ par morceaux et à valeurs dans $\bar{B}(u_0, M\epsilon)$ sur $\left[t_0 - \frac{k}{n}\epsilon; t_0 + \frac{k}{n}\epsilon\right]$.
Pour $k = 0$, c'est vrai : $u_0$ est un élément fixé de $U$ donc la définition « $u_n(t_0) = u_0$ » est valide. De plus, toute fonction définie sur un ensemble singleton est $M$-lipschitzienne et $C^1$ par morceaux ; on a aussi $u_0 \in \bar{B}(u_0, M\epsilon)$.
Supposons la propriété vraie pour un certain $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ et démontrons-la pour $k+1$.

Par hypothèse de récurrence, $u_n$ est bien définie sur $\left[t_0 - \frac{k}{n}\epsilon; t_0 + \frac{k}{n}\epsilon\right]$. Montrons qu'elle est aussi bien définie sur $\left]t_0 + \frac{k}{n}\epsilon; t_0 + \frac{k+1}{n}\epsilon\right]$. Un raisonnement identique montrerait qu'elle est bien définie sur $\left[t_0 - \frac{k+1}{n}\epsilon; t_0 - \frac{k}{n}\epsilon\right[$.
D'après l'hypothèse de récurrence, $u_n\left(t_0 + \frac{k}{n}\epsilon\right) \in \bar{B}(u_0, M\epsilon) \subset H'_U \subset U$. D'autre part, $\left[t_0 + \frac{k}{n}\epsilon; t_0 + \frac{k+1}{n}\epsilon\right] \subset [t_0 - \epsilon; t_0 + \epsilon] \subset I$. Donc l'application

$$s \in \left[t_0 + \frac{k}{n}\epsilon; t_0 + \frac{k+1}{n}\epsilon\right] \quad \to \quad f\left(s, u_n\left(t_0 + \frac{k}{n}\epsilon\right)\right) \in U$$

est bien définie. Elle est de plus continue (car $f$ est continue). En conséquent, la définition

$$u_n(t) = u_n\left(t_0 + \frac{k}{n}\epsilon\right) + \int_{t_0 + \frac{k}{n}\epsilon}^{t} f\left(s, u_n\left(t_0 + \frac{k}{n}\epsilon\right)\right) ds$$

est valide, pour tout $t \in \left]t_0 + \frac{k}{n}\epsilon; t_0 + \frac{k+1}{n}\epsilon\right]$. Nous avons donc montré que $u_n$ était bien définie sur $\left]t_0 + \frac{k}{n}\epsilon; t_0 + \frac{k+1}{n}\epsilon\right]$.
Montrons maintenant que $u_n$ est $M$-lipschitzienne, $C^1$ par morceaux et à valeurs dans $\bar{B}(u_0, M\epsilon)$ sur $\left[t_0 - \frac{k+1}{n}\epsilon; t_0 + \frac{k+1}{n}\epsilon\right]$.
Elle est $C^1$ par morceaux car elle est définie, par morceaux, comme l'intégrale d'une fonction continue. On remarque de plus qu'elle est continue. En effet,
— elle est continue (car $M$-lipschitzienne) sur $\left[t_0 - \frac{k}{n}\epsilon; t_0 + \frac{k}{n}\epsilon\right]$ ;
— elle est continue en $t_0 + \frac{k}{n}\epsilon$ : sa limite à droite vaut $u_n\left(t_0 + \frac{k}{n}\epsilon\right)$ d'après les propriétés de l'intégrale et sa limite à gauche aussi (par continuité de $u_n$ sur $\left[t_0 - \frac{k}{n}\epsilon; t_0 + \frac{k}{n}\epsilon\right]$) ;
— elle est continue en $t_0 - \frac{k}{n}\epsilon$ pour la même raison ;
— elle est continue sur $\left[t_0 - \frac{k+1}{n}\epsilon; t_0 - \frac{k}{n}\epsilon\right[$ et $\left]t_0 + \frac{k}{n}\epsilon; t_0 + \frac{k+1}{n}\epsilon\right]$ comme intégrale d'une fonction continue.

En outre, sa dérivée, partout où elle est définie, vaut

$$f\left(t, u_n\left(t_0 \pm \frac{k'}{n}\right)\right)$$

pour un certain $t \in \left[t_0 - \frac{k+1}{n}\epsilon; t_0 + \frac{k+1}{n}\epsilon\right]$ et un certain $k' \leq k$. On a déjà vu que, pour de telles valeurs de $t$ et $k'$,

$$\left(t, u_n\left(t_0 \pm \frac{k'}{n}\right)\right) \in H'_I \times H'_U.$$

On en déduit que, pour tout point $t \in \left[t_0 - \frac{k+1}{n}\epsilon; t_0 + \frac{k+1}{n}\epsilon\right]$ où $u_n$ est dérivable,

$$||u_n'(t)||_2 \leq M.$$

Comme $u_n$ est continue et $C^1$ par morceaux, cette inégalité suffit à garantir qu'elle est $M$-lipschitzienne sur $\left[t_0 - \frac{k+1}{n}\epsilon; t_0 + \frac{k+1}{n}\epsilon\right]$.
Finalement, pour tout $t \in \left[t_0 - \frac{k+1}{n}\epsilon; t_0 + \frac{k+1}{n}\epsilon\right]$,

$$||u_n(t) - u_0||_2 = ||u_n(t) - u_n(t_0)||_2 \leq M|t - t_0|| \leq M\epsilon,$$

c'est-à-dire que $u_n(t) \in \bar{B}(u_0, M\epsilon)$.

b) D'après la définition de $u_n$ et le théorème fondamental de l'analyse, $u_n$ est dérivable sur

$$[t_0 - \epsilon; t_0 + \epsilon] \setminus \left\{t_0 - \epsilon, t_0 - \frac{n-1}{n}\epsilon, \ldots, t_0 + \epsilon\right\}.$$

et, pour tout $t$ dans cet ensemble,

$$u_n'(t) = f\left(t, u_n\left(t_0 + \frac{m_t}{n}\epsilon\right)\right), \tag{1}$$

où $m_t = E\left(\frac{n(t-t_0)}{\epsilon}\right)$ si $t > t_0$ et $m_t = E\left(\frac{n(t-t_0)}{\epsilon}\right) + 1$ sinon. Pour tout $t$, $\left|m_t - \frac{n(t-t_0)}{\epsilon}\right| \leq 1$ donc

$$\left|\left(t_0 + \frac{m_t}{n}\epsilon\right) - t\right| \leq \frac{\epsilon}{n}.$$

Puisque $u_n$ est $M$-lipschitzienne,

$$\left|u_n\left(t_0 + \frac{m_t}{n}\epsilon\right) - u_n(t)\right| \leq \frac{M\epsilon}{n}.$$

De plus, $u_n([t_0 - \epsilon; t_0 + \epsilon]) \subset \bar{B}(u_0, M\epsilon) \subset H_U' \subset H_U$. On utilise l'hypothèse selon laquelle $f$ est $C$-lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable sur $H_I \times H_U$ pour affirmer que, pour tout $t$,

$$\left|f\left(t, u_n\left(t_0 + \frac{m_t}{n}\epsilon\right)\right) - f(t, u_n(t))\right| \leq \frac{CM\epsilon}{n}.$$

D'après l'équation (1), c'est exactement le résultat demandé.

c) Soient $n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [t_0 - \epsilon; t_0 + \epsilon]$ fixés. Si l'inégalité de la question précédente est vérifie pour $n = n_1$ et $n = n_2$ (ce qui arrive pour tout $t$ sauf un nombre fini de valeurs), on a, par l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned}
||u'_{n_1}(t) - u'_{n_2}(t)||_2 &\leq ||u'_{n_1}(t) - f(t, u_{n_1}(t))||_2 + ||f(t, u_{n_1}(t)) - f(t, u_{n_2}(t))||_2 \\
&\qquad + ||f(t, u_{n_2}(t)) - u'_{n_2}(t)||_2 \\
&\leq \frac{CM\epsilon}{n_1} + ||f(t, u_{n_1}(t)) - f(t, u_{n_2}(t))||_2 + \frac{CM\epsilon}{n_2}.
\end{aligned}$$

Or, comme on l'a déjà vu, $t$ appartient à $H_I$ et $u_{n_1}(t), u_{n_2}(t)$ à $H_U$, donc

$$||u'_{n_1}(t) - u'_{n_2}(t)||_2 \leq \frac{CM\epsilon}{n_1} + C||u_{n_1}(t) - u_{n_2}(t)||_2 + \frac{CM\epsilon}{n_2}.$$

d) Soient $n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*$ fixés. On va montrer l'inégalité demandée pour $t \in [t_0; t_0 + \epsilon]$. Un raisonnement similaire permet de la démontrer pour $t \in [t_0 - \epsilon; t_0[$ (comme à la question 1.d)).
Pour tout $t \in [t_0; t_0 + \epsilon]$,

$$\begin{aligned}
&||u_{n_1}(t) - u_{n_2}(t)||_2 \\
&\quad = \left|\left| u_{n_1}(t_0) - u_{n_2}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \left(u'_{n_1}(s) - u'_{n_2}(s)\right) ds \right|\right|_2 \\
&\quad = \left|\left| \int_{t_0}^{t} \left(u'_{n_1}(s) - u'_{n_2}(s)\right) ds \right|\right|_2 \\
&\quad \leq \int_{t_0}^{t} \left|\left| u'_{n_1}(s) - u'_{n_2}(s) \right|\right| ds \\
&\quad \leq \int_{t_0}^{t} \left( CM\epsilon \left( \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right) + C||u_{n_1}(s) - u_{n_2}(s)||_2 \right) ds \\
&\quad = CM\epsilon \left( \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right) (t - t_0) + \int_{t_0}^{t} C||u_{n_1}(s) - u_{n_2}(s)||_2 ds.
\end{aligned}$$

On applique le lemme de Gronwall pour les fonctions

$$\begin{gathered}
u : t \in [t_0; t_0 + \epsilon] \to ||u_{n_1}(t) - u_{n_2}(t)||_2, \\
a : t \in [t_0; t_0 + \epsilon] \to C, \\
c : t \in [t_0; t_0 + \epsilon] \to CM\epsilon \left( \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right) (t - t_0).
\end{gathered}$$

Il nous indique que, pour tout $t \in [t_0; t_0 + \epsilon]$,

$$\begin{aligned}
||u_{n_1}(t) - u_{n_2}(t)||_2 &\leq CM\epsilon \left( \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right) (t - t_0) \\
&\qquad + \int_{t_0}^{t} C^2 M\epsilon \left( \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right) e^{C(t-s)} (s - t_0) ds \\
&= CM\epsilon \left( \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right) (t - t_0) \\
&\qquad + M\epsilon \left( \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right) \left( e^{C(t-t_0)} - C(t - t_0) - 1 \right) \\
&= M\epsilon \left( \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right) \left( e^{C(t-t_0)} - 1 \right).
\end{aligned}$$

e) D'après la question précédente, pour tous $n, m \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
d_{sup}(u_n, u_m) &= \sup_{t \in [t_0 - \epsilon; t_0 + \epsilon]} ||u_n(t) - u_m(t)||_2 \\
&\leq \sup_{t \in [t_0 - \epsilon; t_0 + \epsilon]} M\epsilon \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right) \left( e^{C|t-t_0|} - 1 \right) \\
&= M\epsilon \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right) \left( e^{C\epsilon} - 1 \right).
\end{aligned}$$

En particulier, pour tout $n$,

$$\sup_{m \geq n} d_{sup}(u_n, u_m) \leq \frac{2M\epsilon}{n} \left( e^{C\epsilon} - 1 \right),$$

ce qui tend vers 0 quand $n \to +\infty$.

f) L'ensemble $\bar{B}(u_0, M\epsilon)$ est compact, donc complet. L'ensemble $C_b^0([t_0-\epsilon; t_0+\epsilon], \bar{B}(u_0, M\epsilon))$ des fonctions continues et bornées de $[t_0 - \epsilon; t_0 + \epsilon]$ vers $\bar{B}(u_0, M\epsilon)$ est donc aussi complet. Cet ensemble est égal à $C^0([t_0 - \epsilon; t_0 + \epsilon], \bar{B}(u_0, M\epsilon))$ (car une fonction continue sur un ensemble compact est toujours bornée et, justement, $[t_0 - \epsilon; t_0 + \epsilon]$ est compact). Donc $C^0([t_0 - \epsilon; t_0 + \epsilon], \bar{B}(u_0, M\epsilon))$ est complet. Comme $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est de Cauchy, elle admet une limite dans cet ensemble (pour la distance uniforme).

g)

$$\left|\left| u_n(t) - u_n(t_0) - \int_{t_0}^{t} f(s, u_n(s)) ds \right|\right|_2 = \left|\left| \int_{t_0}^{t} u_n'(s) ds - \int_{t_0}^{t} f(s, u_n(s)) ds \right|\right|_2$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \int_{[t_0;t]} ||u_n'(s) - f(s,u_n(s))||_2 ds \\
&\leq \int_{[t_0;t]} \frac{CM\epsilon}{n} ds \quad \text{(par la question b))} \\
&= \frac{CM\epsilon}{n}|t-t_0| \\
&\leq \frac{CM\epsilon^2}{n}.
\end{aligned}
$$

h) Pour tout $s \in [t_0 - \epsilon; t_0 + \epsilon]$,

$$
\begin{aligned}
|f(s,u_n(s)) - f(s,u_\infty(s))| &\leq C||u_n(s) - u_\infty(s)||_2 \\
&\leq C d_{sup}(u_n, u_\infty).
\end{aligned}
$$

Donc, pour tout $t$,

$$
\begin{aligned}
\left|\left|\int_{t_0}^t f(s,u_n(s))ds \right.\right. & \left.\left. - \int_{t_0}^t f(s,u_\infty(s))ds\right|\right|_2 \\
&\leq \int_{[t_0;t]} ||f(s,u_n(s)) - f(s,u_\infty(s))||_2 ds \\
&\leq C d_{sup}(u_n,u_\infty)|t-t_0| \\
&\to 0 \quad \text{quand } n \to +\infty,
\end{aligned}
$$

c'est-à-dire que $\int_{t_0}^t f(s,u_n(s))ds \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{t_0}^t f(s,u_\infty(s))ds$.
Pour tout $t$, $u_n(t) \to u_\infty(t)$ et $u_n(t_0) \to u_\infty(t_0)$ lorsque $n \to +\infty$, donc

$$
\begin{aligned}
u_n(t) - u_n(t_0) & - \int_{t_0}^t f(s,u_n(s))ds \\
&\overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u_\infty(t) - u_\infty(t_0) - \int_{t_0}^t f(s,u_\infty(s))ds.
\end{aligned}
$$

Or, d'après la question précédente,

$$
u_n(t) - u_n(t_0) - \int_{t_0}^t f(s,u_n(s))ds \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.
$$

Donc, pour tout $t$, par unicité de la limite,

$$
u_\infty(t) - u_\infty(t_0) - \int_{t_0}^t f(s,u_\infty(s))ds = 0.
$$

On en déduit que $u_\infty$ est une primitive de $(t \to f(t, u_\infty(t)))$, qui est une fonction continue. Donc $u_\infty$ est dérivable et, pour tout $t \in [t_0 - \epsilon; t_0 + \epsilon]$,

$$u'_\infty(t) = f(t, u_\infty(t)).$$

De plus, $u_\infty(t_0) = \lim_{n\to+\infty} u_n(t_0) = u_0$. Donc $u_\infty$ est solution du problème de Cauchy.