Examen de géométrie et équations différentielles

2 juin 2023, 2 heures

Solution de l'exercice 1

1. Première solution : Soit $(x_0, y_0, z_0) \in E$. Nous allons montrer que la définition « par submersion » d'une sous-variété est vérifiée au voisinage de ce point.
   Définissons un voisinage V de (x_0, y_0, z_0) dans $\mathbb{R}^3$ par :
   $$\begin{aligned} V &= \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+^* \quad \text{si } z_0 = 1; \\ &= \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_-^* \quad \text{sinon.} \end{aligned}$$
   Définissons
   $$\begin{array}{rccc} h: & V & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \to & (x^2+y^2-1, z-z_0). \end{array}$$
   C'est une application C^∞, qui vérifie $E \cap V = h^{-1}(\{0\})$. Montrons que sa différentielle en (x_0, y_0, z_0) est surjective.
   Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,
   $$dh(x_0,y_0,z_0)(x,y,z) = (2(x_0x + y_0y), z).$$
   En particulier, $dh(x_0, y_0, z_0)(x_0, y_0, 0) = (2, 0)$ et $dh(x_0, y_0, z_0)(0, 0, 1) = (0, 1)$. Comme $\{(2, 0), (0, 1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$, on a bien $\mathrm{Im}(dh(x_0, y_0, z_0)) = \mathbb{R}^2$.
   Deuxième solution : On remarque que $E = \mathbb{S}^1 \times \{-1, 1\}$. On sait que $\mathbb{S}^1$ est une sous-variété C^∞ de $\mathbb{R}^2$, de dimension 1, et que $\{-1, 1\}$ est une sous-variété C^∞ de $\mathbb{R}$, de dimension 0 (il a été dit en TD que les ensembles finis de points sont des sous-variétés de dimension 0). Le produit est donc (d'après un résultat du cours) une sous-variété C^∞ de $\mathbb{R}^3$, de dimension $1 + 0 = 1$.
2. a) Soit $(x, y, z) \in E$. Vérifions que $\phi(x,y,z) = \begin{pmatrix} x & -zy \\ y & zx \end{pmatrix} \in O_2(\mathbb{R})$.
   Il suffit de vérifier que les équations de la définition sont satisfaites :
   $$\begin{gathered} x^2+y^2 = 1, \\ (-zy)^2 + (zx)^2 = z^2(x^2+y^2) = 1, \\ x(-zy) + y(zx) = 0. \end{gathered}$$
   Donc $\phi(x, y, z) \in O_2(\mathbb{R})$.
   L'application $\tilde{\phi} : (x, y, z) \in E \to (x, -zy, y, zx) \in \mathbb{R}^4$ est de classe C^∞ sur E car chacune de ses coordonnées est un produit d'applications C^∞ sur E (on rappelle que les projections sur chaque coordonnée sont C^∞).
   Donc ϕ est C^∞ de E vers $O_2(\mathbb{R})$.

b) Montrons d'abord que ϕ est injective. Pour tous $(x,y,z),(x',y',z') \in \mathbb{R}^3$, si $\phi(x,y,z) = \phi(x',y',z')$, alors

$$x = x', \quad -zy = -z'y', \quad y = y', \quad zx = z'x'.$$

Ainsi, $x = x', y = y'$ et $zx = z'x, zy = z'y$. Comme on ne peut pas avoir $x = y = 0$ (car $x^2 + y^2 = 1$), les deux dernières égalités entraînent que $z = z'$. Donc $(x,y,z) = (x',y',z')$.

Montrons maintenant que ϕ est surjective. Soit $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in O_2(\mathbb{R})$.

Comme $\langle (a,c),(b,d) \rangle = 0$, (b,d) est orthogonal à (a,c), c'est-à-dire que $(b,d) \in \mathbb{R}(-c,a)$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $(b,d) = (-\lambda c, \lambda a)$. On a alors

$$ad - bc = \lambda(a^2 + c^2) = \lambda.$$

Ainsi, λ est le déterminant de $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ donc $\lambda = 1$ ou -1, ce qui fait que $(a,b,\lambda) \in E$ et que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \phi(a,c,\lambda) \in \phi(E).$$

c) À la question précédente, on a montré que, pour toute $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in O_2(\mathbb{R})$,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \phi(a,c,\lambda) = \phi(a,c,ad-bc).$$

Donc $\phi^{-1}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = (a,c,ad-bc)$.

d) Les questions a) et b) ont montré que ϕ était une bijection C^∞ entre E et $O_2(\mathbb{R})$. Il suffit donc de montrer que ϕ^{-1} est C^∞ de $O_2(\mathbb{R})$ vers E. Or, d'après la question c), ϕ^{-1}, vue comme une application de $O_2(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^3$, est C^∞ : ses deux premières composantes sont les projections sur les première et troisième coordonnées de $O_2(\mathbb{R})$ et sa troisième est une différence de produits de projections. C'est donc une application C^∞ de $O_2(\mathbb{R})$ vers E.

Solution de l'exercice 2

1. Un résultat du cours dit que la résolvante $t \in \mathbb{R} \to R(t,0)$ est l'unique solution maximale du problème de Cauchy

$$\psi'(t) = \begin{pmatrix} -t & 1 \\ 1-t^2 & t \end{pmatrix} \psi(t),$$
$$\psi(0) = \mathrm{Id}_2.$$

Il suffit donc de vérifier que $\psi : t \in \mathbb{R} \to \begin{pmatrix} 1 & t \\ t & 1+t^2 \end{pmatrix}$ est solution de ce système. Tout d'abord,

$$\psi(0) = \mathrm{Id}_2.$$

Ensuite, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} -t & 1 \\ 1-t^2 & t \end{pmatrix} \psi(t) &= \begin{pmatrix} -t & 1 \\ 1-t^2 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ t & 1+t^2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2t \end{pmatrix} \\
&= \psi'(t).
\end{aligned}$$

2. Par définition de la résolvante, cette solution maximale est

$$t \in \mathbb{R} \to R(t,0)u_0 = \begin{pmatrix} 1 & t \\ t & 1+t^2 \end{pmatrix} u_0.$$

3. Cette solution maximale est $(t \in \mathbb{R} \to R(t,t_0)u_0)$. De plus, un résultat du cours dit que, pour tout t,

$$\begin{aligned}
R(t,t_0) &= R(t,0)R(0,t_0) \\
&= R(t,0)R(t_0,0)^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & t \\ t & 1+t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+t_0^2 & -t_0 \\ -t_0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1-t_0(t-t_0) & t-t_0 \\ (t-t_0)(1-t_0t) & 1+t(t-t_0) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

La solution maximale est donc

$$t \in \mathbb{R} \to \begin{pmatrix} 1-t_0(t-t_0) & t-t_0 \\ (t-t_0)(1-t_0t) & 1+t(t-t_0) \end{pmatrix} u_0.$$

Solution de l'exercice 3

1. Un point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ est un équilibre si et seulement si

$$\begin{aligned}
0 &= -x + x^3 + 2xy^2 \\
\text{et } 0 &= -y + y^3 = y(y-1)(y+1),
\end{aligned}$$

c'est-à-dire si et seulement si

$$\begin{gathered}
\big(y = -1 \text{ et } 0 = x^3 + x = x(x^2+1)\big) \\
\big(y = 0 \text{ et } 0 = -x + x^3 = x(x-1)(x+1)\big) \\
\text{ou } \big(y = 1 \text{ et } 0 = x^3 + x = x(x^2+1)\big).
\end{gathered}$$

Les équilibres sont donc $(-1,0), (0,-1), (0,0), (0,1), (1,0)$.

2. L'application $y : I \to \mathbb{R}$ est solution de l'équation différentielle scalaire autonome
$$y' = -y + y^3.$$
Les applications constantes $t \in \mathbb{R} \to -1, t \in \mathbb{R} \to 0, t \in \mathbb{R} \to 1$ sont solutions maximales de cette équation. Aussi, le théorème d'unicité des solutions maximales qui découle du théorème de Cauchy-Lipschitz (qu'on peut appliquer car $y \to -y + y^3$ est C^1 et donc localement lipschitzienne) nous dit que, s'il existe $t_0 \in I$ tel que $y(t_0) = -1, 0$ ou 1, alors y coïncide avec la fonction constante correspondante sur I.

3. a) On remarque que $(-x, y)$ et $(x, -y)$ sont également des solutions :
$$\begin{aligned}(-x)' = -x' = x - x^3 - 2xy^2 &= -(-x) + (-x)^3 + 2(-x)y^2,\\ y' &= -y + y^3\end{aligned}$$
et
$$\begin{aligned}x' = -x + x^3 + 2xy^2 &= -x + x^3 + 2x(-y)^2,\\ (-y)' = -y' = y - y^3 &= -(-y) + (-y)^3.\end{aligned}$$
Montrons que $(-x, y) : I \to \mathbb{R}^2$ est maximale. (Un raisonnement identique montrerait que $(x, -y) : I \to \mathbb{R}^2$ est maximale.) Supposons par l'absurde qu'elle se prolonge en une solution $(X, Y) : J \to \mathbb{R}^2$, avec $I \subsetneq J$ et $(X, Y) = (-x, y)$ sur I. Alors, d'après le calcul qu'on vient de faire, $(-X, Y) : J \to \mathbb{R}^2$ est aussi solution de l'équation différentielle. De plus, $(-X, Y) = (x, y)$ sur I. Donc $(-X, Y) : J \to \mathbb{R}^2$ prolonge strictement $(x, y) : I \to \mathbb{R}^2$, ce qui contredit la maximalité de $(x, y) : I \to \mathbb{R}^2$.

   b) Supposons que $x(t_0) = 0$ pour un certain $t_0 \in I$. Alors (x, y) et $(-x, y)$ sont des solutions maximales de l'équation différentielle, qui coïncident en t_0 : $(x(t_0), y(t_0)) = (0, y(t_0)) = (-x(t_0), y(t_0))$. Pour tout $u_0 \in \mathbb{R}^2$, la solution maximale du problème de Cauchy
$$\begin{cases} x' &= -x + x^3 + 2xy^2,\\ y' &= -y + y^3,\\ (x(t_0), y(t_0)) &= u_0 \end{cases}$$
est unique, donc $(x, y) = (-x, y)$ sur I. On doit donc avoir, sur tout I, $x = -x$, soit $x = 0$.

4. a) L'application N est différentiable comme somme de produits de fonctions différentiables. Pour tout t,
$$\begin{aligned}N'(t) &= 2(x(t)x'(t) + y(t)y'(t))\\ &= 2(x(t)(-x(t) + x(t)^3 + 2x(t)y(t)^2) + y(t)(-y(t) + y(t)^3))\\ &= 2(-x(t)^2 + x(t)^4 + 2x(t)^2y(t)^2 - y(t)^2 + y(t)^4)\\ &= 2(x(t)^2 + y(t)^2)(-1 + x(t)^2 + y(t)^2)\\ &= 2N(t)(N(t) - 1).\end{aligned}$$

b) La solution maximale du problème de Cauchy

$$\begin{aligned} N' &= 2N(N-1), \\ N(0) &= 0 \end{aligned}$$

est la fonction constante $t \in \mathbb{R} \to 0$. Le résultat d'unicité des solutions maximales (qu'on peut appliquer car $(n \in \mathbb{R} \to 2n(n-1))$ est C^1 donc localement lipschitzienne) entraîne donc que, si $N(0) = 0$, alors $N(t) = 0$ pour tout $t \in I$.

Le raisonnement est identique si $N(0) = 1$.

c) Le raisonnement de la question précédente s'applique également lorsqu'on remplace 0 par n'importe quel réel t_0 : s'il existe $t_0 \in I$ tel que $N(t_0) = 0$ ou $N(t_0) = 1$, alors N est constante sur I (de valeur 0 ou 1). En conséquent, si $0 < N(0) < 1$, on doit avoir $N(t) \neq 0$ et $N(t) \neq 1$ pour tout $t \in I$. Puisque N est continue, le théorème des valeurs intermédiaires entraîne que $0 < N(t) < 1$ pour tout $t \in I$.

Sous cette hypothèse, on calcule une expression explicite de N en suivant la méthode vue en cours pour la résolution des équations scalaires autonomes. Pour tout $t \in I$,

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{N'(t)}{2N(t)(N(t)-1)} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{N'(t)}{N(t)-1} - \frac{N'(t)}{N(t)}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\ln(1-N) - \ln(N)\right)'(t) \\ &= \frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{1-N}{N}\right)\right)'(t). \end{aligned}$$

Donc, pour tout $t \in I$,

$$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-N(t)}{N(t)}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-N(0)}{N(0)}\right) + t,$$

soit, pour tout $t \in I$,

$$\begin{aligned} & \frac{1-N(t)}{N(t)} = \frac{1-N(0)}{N(0)}e^{2t} \\ \Rightarrow \quad & \frac{1}{N(t)} - 1 = \frac{1-N(0)}{N(0)}e^{2t} \\ \Rightarrow \quad & N(t) = \frac{1}{1 + \frac{1-N(0)}{N(0)}e^{2t}} = \frac{N(0)}{N(0) + (1-N(0))e^{2t}}. \end{aligned}$$

d) Si $0 < N(0) < 1$, alors $N(t) < 1$ pour tout $t \in I$, c'est-à-dire que $||(x(t), y(t))||_2 < 1$ pour tout $t \in I$. En particulier, (x, y) ne sort pas de la boule $\bar{B}(0,1)$, qui est compacte, au voisinage de $\sup I$. D'après le théorème des bouts, cela entraîne que $\sup I = +\infty$, c'est-à-dire que $\mathbb{R}^+ \subset I$.

e) Commençons par montrer que $(0,0)$ est stable. Soit $V \subset \mathbb{R}^2$ un voisinage quelconque de $(0,0)$. Soit $R \in]0;1[$ tel que $B(0,R) \subset V$.
Soit $(x_0, y_0) \in B(0,R)$. Notons $(x,y) : I \to \mathbb{R}^2$ la solution maximale de l'équation qui vaut (x_0, y_0) en 0 et montrons que $(x(t), y(t)) \in V$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$.
Si $(x_0, y_0) = (0,0)$, c'est vrai : $(x(t), y(t)) = (0,0)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
Si $0 < ||(x_0, y_0)||_2 < R$, alors $0 < N(0) < R^2 < 1$. D'après la question précédente, $I = \mathbb{R}$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$,

$$N(t) = \frac{N(0)}{N(0) + (1 - N(0))e^{2t}} \leq \frac{N(0)}{N(0) + (1 - N(0))} = N(0) < R^2.$$

Donc, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$,

$$||(x(t), y(t))||_2 < R$$

et on a $(x(t), y(t)) \in B(0,R) \subset V$. Cela montre bien la stabilité.
Pour montrer que $(0,0)$ est asymptotiquement stable, on montre que, pour tout $(x_0, y_0) \in B(0,1)$, si $(x,y) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ est la solution maximale de l'équation qui vaut (x_0, y_0) en 0, alors

$$(x(t), y(t)) \xrightarrow{t \to +\infty} (0,0).$$

On utilise à nouveau la formule de la question d) : $1 - N(0) > 0$ donc $N(0) + (1 - N(0))e^{2t} \xrightarrow{t \to +\infty} +\infty$ et $N(t) \xrightarrow{t \to +\infty} 0$. Cela signifie que $||(x(t), y(t))||_2 \xrightarrow{t \to +\infty} 0$ et donc que $(x(t), y(t)) \xrightarrow{t \to +\infty} 0$.

5. Les points noirs indiquent les cinq équilibres.