Partiel de géométrie différentielle

16 mars 2023, 2 heures

Les documents sont autorisés. Le barème est donné à titre indicatif et pourra être modifié.

Exercice 1

Montrer que $\mathcal{A} \overset{\text{déf}}{=} \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } x^2(x+y^2)=1\right\}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^2$.
[2 points]

Exercice 2: matrices de déterminant 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour toute matrice $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$, on note $\det(M)$ son déterminant.

1. L'application $\det : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ est C^∞, puisqu'elle est polynomiale en les coefficients de son entrée. Le but de cette question est de calculer sa différentielle en M pour toute matrice M inversible.
   a) Pour tous $i,j \in \{1,\dots,n\}$, on note e_{ij} la matrice dont toutes les coordonnées sont nulles, sauf la coordonnée (i,j) qui vaut 1.
   Pour $t \in \mathbb{R}$, calculer $\det(I_n + te_{ij})$, en distinguant les cas $i=j$ et $i \neq j$.
   b) En déduire, pour tous i,j, la valeur de $d\det(I_n)(e_{ij})$.
   c) En déduire que, pour toute $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $d\det(I_n)(H) = \mathrm{Tr}(H)$.
   d) Soient $M,H \in \mathbb{R}^{n\times n}$ telles que $\det(M) \neq 0$. Montrer que, lorsque $t \to 0$, $\det(M + tH) = \det(M)(1 + t\mathrm{Tr}(M^{-1}H) + o(t))$.
   e) En déduire que $d\det(M)(H) = \det(M)\mathrm{Tr}(M^{-1}H)$.
2. On définit $\mathcal{E} = \{M \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ tq } \det(M) = 1\}$. Montrer qu'il s'agit d'une sous-variété de $\mathbb{R}^{n\times n}$, de classe C^∞ et dimension n^2-1.
3. Pour toute $M \in \mathcal{E}$, calculer $T_M\mathcal{E}$.

[5 points]

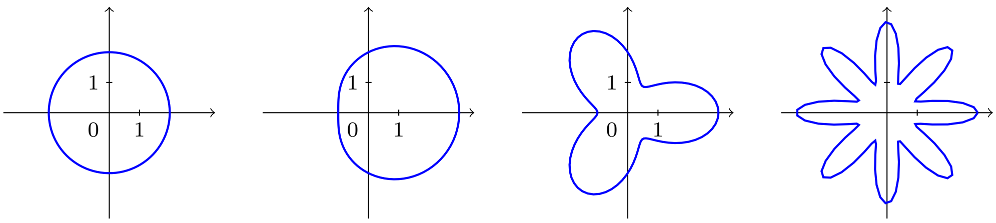
Exercice 3: zigzags

On utilise la notation complexe pour désigner des points de $\mathbb{R}^2$, selon la convention habituelle : pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $e^{i\theta}$ représente le point $(\cos(\theta), \sin(\theta))$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Définissons

$$\begin{array}{rccc} \gamma : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \to & (2+\cos(nt))e^{it}. \end{array}$$

1. a) Justifier que γ est une application C^∞ et 2π-périodique.
   b) Montrer que γ est une immersion en tout point de $\mathbb{R}$.

Notons $C_n = \gamma(\mathbb{R}) = \gamma([-\pi;\pi[) = \gamma([0;2\pi[)$.



(a) C_0 (b) C_1 (c) C_3 (d) C_8

2. a) Montrer que γ réalise un homéomorphisme entre $]-\pi;\pi[$ et $\gamma(]-\pi;\pi[)$.
   [On pourra admettre que la fonction $\arg : \mathbb{R}^2\backslash\{0\} \to [-\pi;\pi[$ définie par $\arg(re^{it}) = t$ pour tous $r>0, t \in [-\pi;\pi[$ est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}^- \times \{0\})$.]

b) Montrer que γ réalise un homéomorphisme entre $]0;2\pi[$ et $\gamma(]0;2\pi[)$.
[On pourra admettre que la fonction $\arg_2 : \mathbb{R}^2\setminus\{0\} \to [0;2\pi[$ définie par $\arg_2(re^{it}) = t$ pour tous $r>0, t\in[0;2\pi[$ est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}^+ \times \{0\})$.]
c) Montrer que C_n est une courbe C^∞ de $\mathbb{R}^2$.

3. Montrer que la longueur de C_n est supérieure ou égale à $4n$.
[On pourra admettre, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'égalité $\int_0^{2\pi} |\sin(n\theta)|d\theta = 4$.]

[8 points]

Exercice 4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on note $x_1, \dots, x_n$ les coordonnées de x. Si f est une application à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, on note $f_1, \dots, f_n$ ses différentes composantes. On définit

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tq } x_1 = 0\},$$
$$H^+ = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tq } x_1 > 0\}, \quad H^- = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tq } x_1 < 0\}.$$

Soit $M \subset \mathbb{R}^n$ une sous-variété de classe C^1. On définit

$$g: \begin{array}{ccc} M & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & |x_1|. \end{array}$$

Le but de l'exercice est de montrer que g est C^1 si et seulement si M vérifie la propriété

$$(\mathcal{P}) : \quad \text{pour tout } x \in M \cap H,\ T_xM \subset H.$$

1. Supposons d'abord que M ne vérifie pas $(\mathcal{P})$. Soient $x \in M \cap H$ et $h \in T_xM \setminus H$.
a) Montrer qu'il existe $\gamma, \delta : [0;1] \to \mathbb{R}^n$ des applications C^1 telles que
— γ et δ sont à images dans M ;
— $\gamma(0) = \delta(0) = x$;
— $\gamma'(0) = h$ et $\delta'(0) = -h$.
b) Montrer que, pour tout $t \in [0;1]$ assez petit, $g \circ \gamma(t) = \text{signe}(h_1)\gamma_1(t)$.
c) En déduire que, si g est C^1, alors $dg(x)(h) = |h_1|$.
d) De manière similaire, montrer que, si g est C^1, alors $dg(x)(-h) = |h_1|$.
e) Montrer que g n'est pas C^1.

2. Supposons maintenant que M vérifie $(\mathcal{P})$. Montrons que g est C^1.
Soient $s \in \mathbb{N}^*$, V un ouvert non-vide de $\mathbb{R}^s$, $\phi : V \to \mathbb{R}^n$ une application C^1 telle que $\phi(V) \subset M$. Montrons que $g \circ \phi$ est C^1.
a) Montrer que, sur $\phi^{-1}(H^+)$, on a l'égalité $g \circ \phi = \phi_1$.
b) En déduire que $g \circ \phi$ est C^1 sur $\phi^{-1}(H^+)$; calculer $d(g\circ\phi)$ en fonction de $d\phi_1$.
c) Montrer que $g \circ \phi$ est C^1 sur $\phi^{-1}(H^-)$; calculer $d(g\circ\phi)$ en fonction de $d\phi_1$.
d) Soit z_0 un point quelconque de $\phi^{-1}(H)$. Montrer que, pour tout $h \in \mathbb{R}^s$,
$$d\phi(z_0)(h) \in T_{\phi(z_0)}M.$$
e) En déduire que, pour tout $h \in \mathbb{R}^s$, $d\phi_1(z_0)(h) = 0$, puis que
$$\phi_1(z_0 + h) = o(||h||_2) \quad \text{pour } h \to 0.$$
f) En déduire que
$$g \circ \phi(z_0 + h) = o(||h||_2) \quad \text{pour } h \to 0,$$
puis que $g \circ \phi$ est différentiable en z_0. Donner la valeur de sa différentielle.
g) Montrer que $g \circ \phi$ est C^1 sur V.

[7 points]