Partiel de géométrie différentielle : corrigé

16 mars 2023

Solution de l'exercice 1

Soit $g : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \to x^2(x+y^2) - 1 \in \mathbb{R}$. C'est une application C^∞. Puisque $\mathcal{A} = g^{-1}(\{0\})$, il suffit pour montrer que $\mathcal{A}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^2$ (de classe C^∞ et dimension 1) de vérifier que g est une submersion sur $\mathcal{A}$.
Soit $(x,y) \in \mathcal{A}$ quelconque. Vérifions que $dg(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est surjective, c'est-à-dire (puisque son espace d'arrivée est de dimension 1) qu'elle n'est pas l'application nulle. On a

$$\begin{aligned} \partial_x g(x,y) &= (3x + 2y^2)x, \\ \partial_y g(x,y) &= 2x^2 y. \end{aligned}$$

Donc si $x \neq 0$ et $y \neq 0$, alors $\partial_y g(x,y) \neq 0$ et $dg(x,y) \neq 0$.
Il est impossible que $x = 0$ car on aurait alors $0 = 0^2(0 + y^2) = 1$, puisque (x,y) appartient à $\mathcal{A}$.
Si $y = 0$, alors $x^3 = 1$ (puisque (x,y) est dans $\mathcal{A}$) donc $x = 1$. Dans ce cas,

$$\partial_x g(x,y) = 3 \neq 0.$$

On a donc bien aussi $dg(x,y) \neq 0$. Dans tous les cas, on a bien montré que $dg(x,y) \neq 0$.

Solution de l'exercice 2

1. a) Soient $i, j \in \{1, \dots, n\}$ et $t \in \mathbb{R}$ quelconques. Calculons $\det(I_n + te_{ij})$.
   Commençons par le cas où $i = j$. Alors $I_n + te_{ij}$ est une matrice diagonale, dont tous les coefficients valent 1 sauf le i-ème, qui vaut $1 + t$. Son déterminant est alors le produit des coefficients diagonaux :

   $$\det(I_n + te_{ij}) = 1 + t.$$

   Supposons maintenant que $i \neq j$. Si $i < j$, alors $I_n + te_{ij}$ est une matrice triangulaire supérieure et tous ses coefficients sur la diagonale valent 1. Son déterminant est alors le produit des coefficients diagonaux :

   $$\det(I_n + te_{ij}) = 1.$$

   De même si $i > j$. La matrice est alors triangulaire inférieure au lieu d'être triangulaire supérieure mais son déterminant est à nouveau le produit des coefficients diagonaux :

   $$\det(I_n + te_{ij}) = 1.$$

b) Soient $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ quelconques. Commençons par supposer que $i = j$. D'après la question précédente,

$$\det(I_n + te_{ij}) = 1 + t = 1 + t + o(t) \quad \text{quand } t \to 0.$$

Or $\det(I_n + te_{ij}) = \det(I_n) + td\det(I_n)(e_{ij}) + o(t)$. En identifiant les coefficients du développement limité, on obtient

$$d\det(I_n)(e_{ij}) = 1.$$

Supposons maintenant que $i \neq j$. D'après la question précédente,

$$\det(I_n + te_{ij}) = 1 = 1 + o(t) \quad \text{quand } t \to 0.$$

Comme $\det(I_n + te_{ij}) = \det(I_n) + td\det(I_n)(e_{ij}) + o(t)$, on a

$$d\det(I_n)(e_{ij}) = 0.$$

c) Soit $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$ quelconque.

$$\begin{aligned} d\det(I_n)(H) &= d\det(I_n)\left(\sum_{i,j=1}^{n} H_{ij}e_{ij}\right) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} H_{ij} d\det(I_n)\,(e_{ij}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} H_{ii} \\ &= \mathrm{Tr}(H). \end{aligned}$$

d) Tout d'abord, $\det(M + tH) = \det(M(I_n + tM^{-1}H)) = \det(M)\det(I_n + tM^{-1}H)$. Ensuite, par la définition de la différentielle en I_n,

$$\begin{aligned} \det(I_n + tM^{-1}H) &= \det(I_n) + td\det(I_n)(M^{-1}H) + o(t) \\ &= 1 + t\mathrm{Tr}(M^{-1}H) + o(t). \end{aligned}$$

Cela donne donc $\det(M + tH) = \det(M)\left(1 + t\mathrm{Tr}(M^{-1}H) + o(t)\right)$.

e) D'après la question précédente,

$$\det(M + tH) = \det(M) + t\det(M)\mathrm{Tr}(M^{-1}H) + o(t).$$

Comme on a aussi $\det(M + tH) = \det(M) + td\det(M)(H) + o(t)$, on doit avoir

$$d\det(M)(H) = \det(M)\mathrm{Tr}(M^{-1}H).$$

2. Définissons
$$g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{n\times n} & \to & \mathbb{R} \\ M & \to & \det(M)-1 \end{array}$$
C'est une application de classe C^∞ et $\mathcal{E} = g^{-1}(\{0\})$. De plus, c'est une submersion en tout point de $\mathcal{E}$. En effet, pour toute $M \in \mathcal{E}$,
$$dg(M = d\det(M) = \left(H \in \mathbb{R}^{n\times n} \to \det(M)\mathrm{Tr}(M^{-1}H) = \mathrm{Tr}(M^{-1}H) \in \mathbb{R}\right).$$
En particulier, $d\det(M)(M) = \mathrm{Tr}(I_n) = n$. Donc $d\det(M)$ est une application linéaire non-nulle à images dans un espace vectoriel de dimension 1 : elle est surjective.
Donc $\mathcal{E}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^{n\times n}$, de classe C^∞ et dimension n^2-1.
3. Définissons g comme à la question précédente. Pour toute $M \in \mathcal{E}$, l'une des formules du cours dit que
$$\begin{aligned} T_M\mathcal{E} &= \mathrm{Ker}(dg(M)) \\ &= \mathrm{Ker}(d\det(M)) \\ &= \left\{H \in \mathbb{R}^{n\times n}, \mathrm{Tr}(M^{-1}H) = 0\right\}. \end{aligned}$$
On peut noter que $T_M\mathcal{E} = \{{}^tM^{-1}\}^\perp$ si on munit $\mathbb{R}^{n\times n}$ du produit scalaire le plus usuel : $\langle A, B\rangle \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Tr}(A^tB)$.

Solution de l'exercice 3

1. a) Pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$\gamma(t) = ((2+\cos(nt))\cos(t), (2+\cos(nt))\sin(t)).$$
Chaque composante de γ est donc un produit de fonctions C^∞ et 2π-périodiques. La fonction γ est donc elle-même C^∞ et 2π-périodique.

   b) Soit $t \in \mathbb{R}$. Il faut montrer que $\gamma'(t) \neq 0$. On a
$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= \big((2+\cos(nt))(-\sin(t)) - n\sin(nt)\cos(t), \\ &\qquad (2+\cos(nt))\cos(t) - n\sin(nt)\sin(t)\big) \\ &= (2+\cos(nt))(-\sin(t),\cos(t)) - n\sin(nt)(\cos(t),\sin(t)). \end{aligned}$$
Les vecteurs $(-\sin(t),\cos(t))$ et $(\cos(t),\sin(t))$ sont de norme 1 et orthogonaux entre eux donc
$$||\gamma'(t)||_2^2 = (2+\cos(nt))^2 + (-n\sin(nt))^2 = (2+\cos(nt))^2 + n^2\sin^2(nt).$$
Comme $2+\cos(nt) \geq 2-1 = 1$, on a nécessairement $||\gamma'(t)||_2^2 \geq (2+\cos(nt))^2 \geq 1$. En particulier, $\gamma'(t) \neq 0$.

2. a) L'application γ est continue et surjective de $]-\pi;\pi[$ vers $\gamma(]-\pi;\pi[)$. Montrons qu'elle est injective (donc bijective) et de réciproque continue. Définissons l'application $\arg : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to [-\pi;\pi[$ comme dans l'indication. Pour tout $t \in]-\pi;\pi[$, comme $2+\cos(nt) > 0$, on a

$$\arg \circ \gamma(t) = \arg((2+\cos(nt))e^{it}) = t.$$

Cela montre que γ est injective sur $]-\pi;\pi[$: pour tous $t_1, t_2 \in]-\pi;\pi[$, si $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$, alors

$$t_1 = \arg \circ \gamma(t_1) = \arg \circ \gamma(t_2) = t_2.$$

Cela montre également que la réciproque de γ est arg (restreinte à $\gamma(]-\pi;\pi[)$). Or $\gamma(]-\pi;\pi[) \subset \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}^- \times \{0\})$. En effet, pour tout $t \in]-\pi;\pi[$, $e^{it} \notin \mathbb{R}^- \times \{0\}$ (car $t \not\equiv \pi[2\pi]$). Comme $(2+\cos(nt)) \in \mathbb{R}_+^*$, cela entraîne que $\gamma(t) = (2+\cos(nt))e^{it} \notin \mathbb{R}^- \times \{0\}$.
Donc arg est continue sur $\gamma(]-\pi;\pi[)$ et γ est bien de réciproque continue.

b) Le raisonnement est très similaire à la question précédente. L'application γ est continue et surjective de $]0;2\pi[$ vers $\gamma(]0;2\pi[)$. De plus,

$$\arg_2 \circ \gamma(t) = t, \quad \forall t \in]0;2\pi[.$$

Cela implique que γ est injective sur $]0;2\pi[$. Elle est donc bijective, de réciproque $\arg_2$.
Comme $\gamma(]0;2\pi[) \subset \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}^+ \times \{0\})$ (car $e^{it} \notin \mathbb{R}^+ \times \{0\}$ si $t \not\equiv 0[2\pi]$), $\arg_2$ est continue sur $\gamma(]0;2\pi[)$.

c) Soit $x \in C_n$ quelconque. On va montrer que la définition « immersion » d'une sous-variété est vérifiée au voisinage de x. Soit $t \in [0;2\pi[$ tel que $x = \gamma(t)$.
Commençons par supposer que $t \neq 0$. Posons $V = \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}^+ \times \{0\})$. D'après le raisonnement de la question précédente,

$$C_n \cap V = \{\gamma(t), t \in [0;2\pi[, t \not\equiv 0[2\pi]\} = \gamma(]0;2\pi[).$$

On a vu que γ était une immersion sur $]0;2\pi[$ réalisant un homéomorphisme vers son image. La définition « immersion » est donc bien vérifiée.
Supposons maintenant que $t = 0$. Posons $V = \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}^- \times \{0\})$. De même que précédemment,

$$C_n \cap V = \gamma(]-\pi;\pi[).$$

Or γ est une immersion sur $]-\pi;\pi[$ réalisant un homéomorphisme vers son image.

3. Si $n = 0$, l'inégalité est vraie : la longueur d'une courbe est toujours positive. Supposons donc $n > 0$. Grâce au calcul fait dans la première question, on voit que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$||\gamma'(t)||_2^2 = (2+\cos(nt))^2 + n^2 \sin^2(nt)$$

$$\geq n^2 \sin^2(nt).$$

Ainsi, $||\gamma'(t)||_2 \geq n|\sin(nt)|$ et

$$\begin{aligned}
\text{longueur}(C_n) &= \int_0^{2\pi} ||\gamma'(t)||_2 dt \\
&\geq n \int_0^{2\pi} |\sin(nt)| dt \\
&= \int_0^{2\pi n} |\sin(u)| du \\
&\qquad \text{(changement de variable } u = nt) \\
&= \sum_{k=0}^{2n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(u)| du \\
&= \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{2n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \sin(u) du + \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{2n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} (-\sin(u)) du \\
&= \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{2n-1} [-\cos(u)]_{k\pi}^{(k+1)\pi} + \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{2n-1} [\cos(u)]_{k\pi}^{(k+1)\pi} \\
&= \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{2n-1} 2 + \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{2n-1} 2 \\
&= 4n.
\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 4

1. a) Comme T_xM est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et comme h appartient à T_xM, $-h$ appartient aussi à T_xM.
L'existence de γ est une conséquence de la définition de l'espace tangent, appliquée au vecteur h. L'existence de δ est une conséquence de la définition de l'espace tangent, appliquée au vecteur $-h$.

   b) Comme $h \notin H$, $h_1 \neq 0$. Supposons par exemple que $h_1 > 0$; le raisonnement est essentiellement identique si $h_1 < 0$.
Alors $\gamma_1(0) = x_1 = 0$ et $\gamma_1'(0) = h_1 > 0$. Comme γ est C^1, γ_1' est continue. Il existe donc un intervalle de la forme $[0;\epsilon]$ sur lequel $\gamma_1' > 0$, donc sur lequel γ_1 est strictement croissante. Pour tout t dans cet intervalle,
$$\gamma_1(t) > \gamma_1(0) = 0.$$
Ainsi, $g \circ \gamma(t) = |\gamma_1(t)| = \gamma_1(t) = \text{signe}(h_1)\gamma_1(t)$.

   c) Supposons g de classe C^1. D'après la définition de la différentielle,
$$dg(x)(h) = (g \circ \gamma)'(0).$$

Comme $g \circ \gamma$ coïncide avec signe$(h_1)\gamma_1$ au voisinage de 0,

$$(g \circ \gamma)'(0) = \text{signe}(h_1)\gamma_1'(0) = \text{signe}(h_1)h_1 = |h_1|.$$

d) On applique le même raisonnement qu'aux deux questions précédentes en remplaçant γ par δ et h par $-h$. On montre donc que, pour tout $t \in [0;1]$ assez petit,

$$g \circ \delta(t) = \text{signe}(-h_1)\delta_1(t).$$

Cela entraîne

$$\begin{aligned} dg(x)(-h) &= (g \circ \delta)'(0) \\ &= \text{signe}(-h_1)\delta_1'(0) \\ &= \text{signe}(-h_1)(-h_1) \\ &= |-h_1| \\ &= |h_1|. \end{aligned}$$

e) D'après les questions précédentes, si g était C^1, on devrait avoir

$$|h_1| = dg(x)(-h) = -dg(x)(h) = -|h_1|,$$

ce qui est impossible car $|h_1| > 0$.

2. a) Pour tout $z \in \phi^{-1}(H^+)$, $\phi(z) \in H^+$, c'est-à-dire que $\phi_1(z) > 0$. En conséquent, pour tout $z \in \phi^{-1}(H^+)$,

$$g \circ \phi(z) = |\phi_1(z)| = \phi_1(z).$$

b) Puisque ϕ est de classe C^1, ϕ_1 est aussi C^1. Comme $g \circ \phi$ coïncide avec ϕ_1 sur l'ouvert $\phi^{-1}(H^+)$, $g \circ \phi$ est aussi C^1. De plus,

$$d(g \circ \phi) = d\phi_1.$$

c) Pour tout $z \in \phi^{-1}(H^-)$, $\phi_1(z) < 0$ donc

$$g \circ \phi(z) = |\phi_1(z)| = -\phi_1(z).$$

Ainsi, $g \circ \phi$ coïncide avec $-\phi_1$ sur l'ouvert $\phi^{-1}(H^-)$. C'est donc une application de classe C^1, dont la différentielle vaut

$$d(g \circ \phi) = -d\phi_1.$$

d) D'après la remarque qui suit la définition 2.28 dans le poly, la différentielle classique de $\phi : V \subset \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^n$ coïncide avec sa différentielle « au sens des sous-variétés » lorsque ϕ est vue comme une application de $V \subset \mathbb{R}^s \to M$. La différentielle « au sens des sous-variétés » en z_0 est une application linéaire de $T_{z_0}V = \mathbb{R}^s$ vers $T_{\phi(z_0)}M$. On a donc, pour tout $h \in \mathbb{R}^s$,

$$d\phi(z_0)(h) \in T_{\phi(z_0)}M.$$

e) Comme $\phi(z_0) \in H$ et M vérifie la propriété $(\mathcal{P})$, $T_{\phi(z_0)}M \subset H$. Ainsi, pour tout $h \in \mathbb{R}^s$, la question précédente implique que $d\phi(z_0)(h) \in H$, c'est-à-dire
$$d\phi_1(z_0)(h) = 0.$$
Donc, pour $h \to 0$, $\phi_1(z_0 + h) = \phi_1(z_0) + d\phi_1(z_0)(h) + o(||h||_2) = 0 + 0 + o(||h||_2) = o(||h||_2)$.

f) Pour $h \to 0$,
$$g \circ \phi(z_0 + h) = |\phi_1(z_0 + h)| = |o(||h||_2)| = o(||h||_2).$$
D'après la définition de la différentiabilité, $g \circ \phi$ est différentiable en z_0, de différentielle nulle.

g) Aux questions b), c) et f), on a montré que $g \circ \phi$ était différentiable en tout point de $\phi^{-1}(H^+)$, de $\phi^{-1}(H^-)$ et de $\phi^{-1}(H)$. La fonction $g \circ \phi$ est donc différentiable sur V tout entier. Il faut maintenant montrer que sa différentielle est continue.
Comme $g \circ \phi$ est C^1 sur les ouverts $\phi^{-1}(H^+)$ et $\phi^{-1}(H^-)$, on a déjà que $d(g \circ \phi)$ est continue en chaque point de $\phi^{-1}(H^+)$ et $\phi^{-1}(H^-)$. Il suffit de montrer que $d(g \circ \phi)$ est continue en chaque point de $\phi^{-1}(H)$.
Soit $z_0 \in \phi^{-1}(H)$ quelconque. Utilisons la caractérisation séquentielle de la continuité : soit $(Z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de V convergeant vers z_0. Montrons que
$$d(g \circ \phi)(Z_k) \overset{k \to +\infty}{\longrightarrow} d(g \circ \phi)(z_0) = 0.$$
D'après les questions b), c) et f), on a pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$d(g \circ \phi)(Z_k) = d\phi_1(Z_k) \text{ ou } -d\phi_1(Z_k) \text{ ou } 0.$$
En particulier, pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$||d(g \circ \phi)(Z_k)||_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^s, \mathbb{R}^n)} \leq ||d\phi_1(Z_k)||_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^s, \mathbb{R}^n)}.$$
Or $d\phi_1$ est continue et $Z_k \overset{k \to +\infty}{\longrightarrow} z_0$. Donc $d\phi_1(Z_k) \overset{k \to +\infty}{\longrightarrow} d\phi_1(z_0) = 0$. (L'égalité $d\phi_1(z_0) = 0$ provient de la question e).) En conséquent,
$$||d\phi_1(Z_k)||_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^s, \mathbb{R}^n)} \overset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$
Par comparaison, on a aussi
$$||d(g \circ \phi)(Z_k)||_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^s, \mathbb{R}^n)} \overset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 0,$$
c'est-à-dire $d(g \circ \phi)(Z_k) \overset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 0 = d(g \circ \phi)(z_0)$.