Corrigé de l'exercice 2.1

Irène Waldspurger

waldspurger@ceremade.dauphine.fr

Exercice 2.1

Si a est un entier naturel, on note $a\mathbb{N}$ l'ensemble $\{ka, k \in \mathbb{N}\}$.
1. On fixe deux entiers naturels non nuls a et b. Montrer l'équivalence suivante :

$$a\mathbb{N} \subset b\mathbb{N} \iff a \in b\mathbb{N}.$$

Première étape : montrons que $(a\mathbb{N} \subset b\mathbb{N}) \Rightarrow (a \in b\mathbb{N})$.
Supposons $a\mathbb{N} \subset b\mathbb{N}$. Comme $a = 1 \times a$ est un élément de $a\mathbb{N}$, il doit alors appartenir à $b\mathbb{N}$, c'est-à-dire $a \in b\mathbb{N}$.
Deuxième étape : montrons que $(a \in b\mathbb{N}) \Rightarrow (a\mathbb{N} \subset b\mathbb{N})$.
Supposons $a \in b\mathbb{N}$. D'après la définition de $b\mathbb{N}$, il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $a = k_0 b$. Soit un tel k_0 fixé.
Montrons que $a\mathbb{N} \subset b\mathbb{N}$. Pour cela, fixons $x \in a\mathbb{N}$ quelconque et montrons que $x \in b\mathbb{N}$.
Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $x = ka$ (un tel k existe d'après la définition de $a\mathbb{N}$). Alors

$$x = ka = kk_0 b = (kk_0)b.$$

Comme kk_0 appartient à $\mathbb{N}$, cette égalité entraîne que $x \in b\mathbb{N}$.
2. On fixe deux entiers naturels non nuls a et b. Montrer l'équivalence suivante :

$$a\mathbb{N} = b\mathbb{N} \iff a = b.$$

Première étape : montrons que $(a = b) \Rightarrow (a\mathbb{N} = b\mathbb{N})$.
Supposons $a = b$. Alors $a\mathbb{N} = \{ka, k \in \mathbb{N}\} = \{kb, k \in \mathbb{N}\} = b\mathbb{N}$.
Deuxième étape : montrons que $(a\mathbb{N} = b\mathbb{N}) \Rightarrow (a = b)$.
Supposons $a\mathbb{N} = b\mathbb{N}$. Alors $a\mathbb{N} \subset b\mathbb{N}$ et $b\mathbb{N} \subset a\mathbb{N}$. D'après la première question, on a donc $a \in b\mathbb{N}$ et $b \in a\mathbb{N}$. En conséquent, il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ et $k_1 \in \mathbb{N}$ tels que

$$a = k_0 b \text{ et } b = k_1 a.$$

Fixons de tels entiers k_0 et k_1.
On doit avoir $a = k_0 b = k_0 k_1 a$. Comme a est non-nul, cela entraîne $k_0 k_1 = 1$. Donc k_0 et k_1 sont des diviseurs de 1 ; comme ce sont en outre des entiers positifs, on a nécessairement $k_0 = k_1 = 1$. Donc $a = k_0 b = b$.