Corrigé de l'exercice 2.12, ensemble E_4

Irène Waldspurger

waldspurger@ceremade.dauphine.fr

Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, on note A_k l'intervalle $[k, k+10]$. Déterminer, en justifiant votre réponse, l'ensemble suivant :

$$E_4 = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k.$$

L'ensemble E_4 vaut $\mathbb{R}^+$. Nous allons le démontrer par double inclusion.

Montrons que $E_4 \subset \mathbb{R}^+$.

Soit $x \in E_4$ quelconque. D'après la définition de la réunion, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $x \in A_k = [k, k+10]$. Fixons un tel k. Alors $k \leq x \leq k+10$. En particulier, $x \geq k \geq 0$. Donc $x \in \mathbb{R}^+$.

Montrons que $\mathbb{R}^+ \subset E_4$.

Soit $x \in \mathbb{R}^+$ quelconque. Montrons que $x \in E_4$, c'est-à-dire montrons qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $x \in A_k = [k, k+10]$. Nous allons montrer l'existence d'un tel k en donnant un exemple.

Posons $k = E(x) \in \mathbb{N}$. Montrons que $x \in A_k$. D'après la définition de la partie entière,

$$k = E(x) \leq x < E(x) + 1 = k + 1.$$

En particulier, $k \leq x \leq k+1 \leq k+10$, donc $x \in [k, k+10] = A_k$.