Indications pour l'exercice 2.1

Irène Waldspurger

waldspurger@ceremade.dauphine.fr

Exercice 2.1

Si a est un entier naturel, on note $a\mathbb{N}$ l'ensemble $\{ka, k \in \mathbb{N}\}$.

Remarque : pour tout entier naturel a, $a\mathbb{N}$ est l'ensemble des multiples positifs de a. C'est l'ensemble dont les éléments sont $0, a, 2a, 3a, 4a$, etc.

1. On fixe deux entiers naturels non nuls a et b. Montrer l'équivalence suivante :

$$a\mathbb{N} \subset b\mathbb{N} \iff a \in b\mathbb{N}.$$

Première étape : montrer l'implication $a\mathbb{N} \subset b\mathbb{N} \Rightarrow a \in b\mathbb{N}$, en utilisant la définition de l'inclusion.

Deuxième étape : montrer l'implication $a \in b\mathbb{N} \Rightarrow a\mathbb{N} \subset b\mathbb{N}$. Pour cela, supposer que $a \in b\mathbb{N}$ puis

- montrer qu'il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $a = k_0 b$;
- fixer k_0 comme à la ligne précédent et l'utiliser pour montrer que $a\mathbb{N} \subset b\mathbb{N}$.

2. On fixe deux entiers naturels non nuls a et b. Montrer l'équivalence suivante :

$$a\mathbb{N} = b\mathbb{N} \iff a = b.$$

Première étape : montrer l'implication $a = b \Rightarrow a\mathbb{N} = b\mathbb{N}$.

Deuxième étape : montrer l'implication $a\mathbb{N} = b\mathbb{N} \Rightarrow a = b$. Pour cela, supposer que $a\mathbb{N} = b\mathbb{N}$. En utilisant la première question, montrer qu'il existe deux entiers dans $\mathbb{N}^*$, k_0 et k_1, tels que

$$a = k_0 b \text{ et } b = k_1 a.$$

En déduire que $a = b$.