Corrigé de l'exercice 2.6

Irène Waldspurger

waldspurger@ceremade.dauphine.fr

Exercice 2.6

Soit E un ensemble ; soient A, B, C des parties de E. On note A^c le complémentaire de A dans E.

1. Montrer l'égalité $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$.

On va montrer que $(A \setminus B) \setminus C$ et $A \setminus (B \cup C)$ ont les mêmes éléments, c'est-à-dire qu'on va montrer

$$\forall x \in E, \Big((x \in (A \setminus B) \setminus C) \iff (x \in A \setminus (B \cup C))\Big).$$

Soit $x \in E$ quelconque.

$$\begin{aligned}
(x \in (A \setminus B) \setminus C) &\iff (x \in A \setminus B) \text{ ET } (x \notin C) \quad \text{(définition de la différence ensembliste)}\\
&\iff (x \in A \text{ ET } x \notin B) \text{ ET } (x \notin C) \quad \text{(encore la définition de la différence)}\\
&\iff (x \in A) \text{ ET } (x \notin B \text{ ET } x \notin C) \quad \text{(associativité de ET)}\\
&\iff (x \in A) \text{ ET NON}(x \in B \text{ OU } x \in C)\\
&\iff (x \in A) \text{ ET NON}(x \in B \cup C)\\
&\iff (x \in A) \text{ ET } (x \notin B \cup C)\\
&\iff (x \in A \setminus (B \cup C)) \quad \text{(définition de la différente ensembliste)}
\end{aligned}$$

2. Montrer l'égalité $A \cap (A^c \cup B) = A \cap B$.

On utilise la propriété de distributivité de $\cap$ par rapport à $\cup$:

$$A \cap (A^c \cup B) = (A \cap A^c) \cup (A \cap B).$$

Comme $A \cap A^c = \emptyset$ (aucun élement de E ne peut simultanément appartenir à A et ne pas appartenir à A),

$$A \cap (A^c \cup B) = \emptyset \cup (A \cap B) = A \cap B.$$

3. Démontrer l'équivalence suivante :

$$(A \subset B) \iff (C_E(B) \subset C_E(A)).$$

La propriété $(A \subset B)$ s'écrit avec des quantificateurs :

$$\forall x \in E, (x \in A \Rightarrow x \in B).$$

En utilisant le fait qu'une implication est toujours équivalente à sa contraposée, on obtient

$$\begin{aligned}
(A \subset B) &\iff (\forall x \in E, (x \in A \Rightarrow x \in B)) \\
&\iff (\forall x \in E, (x \notin B \Rightarrow x \notin A)) \\
&\iff (\forall x \in E, (x \in C_E(B) \Rightarrow x \in C_E(A))) \\
&\iff (C_E(B) \subset C_E(A)).
\end{aligned}$$