Corrigé des exercices 3.3 et 3.4

Irène Waldspurger

waldspurger@ceremade.dauphine.fr

Exercice 3.3

Dans tout l'exercice, on fixe une fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ et on suppose que f vérifie la propriété suivante :

$$\forall \epsilon > 0, \exists x \in \mathbb{R}_+^*, 0 < f(x) < \epsilon.$$

1. On introduit la fonction $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, g(x) = 5f(x)^2$.
Démontrer que g vérifie la propriété suivante :

$$\forall \epsilon > 0, \exists x \in \mathbb{R}_+^*, 0 < g(x) < \epsilon.$$

Pour éviter les confusions entre les différentes variables, on renomme celles de l'hypothèse : f vérifie la propriété

$$\forall \eta > 0, \exists y \in \mathbb{R}_+^*, 0 < f(y) < \eta. \quad (1)$$

Démontrons maintenant que

$$\forall \epsilon > 0, \exists x \in \mathbb{R}_+^*, 0 < g(x) < \epsilon.$$

Soit $\epsilon > 0$ quelconque.
[Remarque : la phrase « Soit $\epsilon > 0$ quelconque. » est indispensable. Elle signifie « on choisit un réel strictement positif arbitraire ; on l'appelle ϵ et on garde ensuite sa valeur fixée jusqu'à la fin de la démonstration ».]
Démontrons $\exists x \in \mathbb{R}_+^*, 0 < g(x) < \epsilon$. Il suffit pour cela de trouver un réel $x \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $0 < g(x) < \epsilon$.
Posons $\eta = \sqrt{\frac{\epsilon}{5}}$.
[Remarque : si on n'avait pas écrit « Soit $\epsilon > 0$ quelconque. », cette définition de η n'aurait pas de sens. On ne peut pas définir η avec une formule faisant intervenir ϵ si on n'a pas dit ce qu'était ϵ.]
D'après l'hypothèse (1), il existe $y \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$0 < f(y) < \eta.$$

Fixons un tel y pour la suite du raisonnement.

Puisque la fonction carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et puisque $0 < f(y) < \eta$, on a

$$0 < f(y)^2 < \eta^2$$
$$\text{donc } 0 < 5f(y)^2 < 5\eta^2$$
$$\text{c'est-à-dire } 0 < g(y) < 5\left(\sqrt{\frac{\epsilon}{5}}\right)^2 = \epsilon.$$

Posons $x = y$. D'après la ligne précédente, on a

$$0 < g(x) < \epsilon.$$

On a donc trouvé x vérifiant la propriété voulue.
2. On introduit la fonction $h : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, h(x) = f(x^2)$.
Démontrer que h vérifie la propriété suivante :

$$\forall \epsilon > 0, \exists x \in \mathbb{R}_+^*, 0 < h(x) < \epsilon.$$

Soit $\epsilon > 0$ quelconque. Démontrons

$$\exists x \in \mathbb{R}_+^*, 0 < h(x) < \epsilon.$$

Il suffit pour cela de trouver un réel $x \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $0 < h(x) < \epsilon$.
Soit $\eta = \epsilon$. D'après l'hypothèse (1), il existe $y \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$0 < f(y) < \eta. \tag{2}$$

Fixons un tel y.
Posons $x = \sqrt{y}$. C'est bien un élément de $\mathbb{R}_+^*$.
[Ici, on définit x (à partir de y) et non y (qui a déjà été défini avant). On écrit donc « Posons $x = \sqrt{y}$. » et pas « Posons $y = x^2$. ».]
De plus, $h(x) = f(x^2) = f(y)$ donc, d'après l'inégalité (2)

$$0 < h(x) < \eta = \epsilon.$$

On a donc trouvé x vérifiant la propriété voulue.
[Remarque : attention, dans cette question, à être rigoureux/se avec les manipulations de fonctions. Par exemple, si $x \in \mathbb{R}_+^*$ est fixé, on ne peut PAS affirmer que

$$f(x^2) = f(x)^2.$$

Si $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ sont des réels fixés tels que $f(x) = f(y)$, on ne peut PAS affirmer que

$$f(x^2) = f(y^2).$$

On ne peut PAS NON PLUS supposer que f est croissante.]

3. On introduit la fonction $\varphi : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \varphi(x) = \frac{1}{f(\sqrt{x})}$.
Démontrer que φ vérifie la propriété suivante :

$$\forall A > 0, \exists x \in \mathbb{R}_+^*, \varphi(x) > A.$$

Soit $A > 0$ quelconque. Démontrons

$$\exists x \in \mathbb{R}_+^*, \varphi(x) > A.$$

Il suffit pour cela de trouver un réel $x \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\varphi(x) > A$.
Posons $\eta = \frac{1}{A}$. C'est un réel strictement positif. D'après l'hypothèse (1), il existe $y \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$0 < f(y) < \eta.$$

Fixons un tel y.
Posons $x = y^2$. C'est un élément de $\mathbb{R}_+^*$. On a $\varphi(x) = \frac{1}{f(\sqrt{x})} = \frac{1}{f(y)}$. Comme $f(y) < \eta$ et la fonction inverse est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a

$$\varphi(x) = \frac{1}{f(y)} > \frac{1}{\eta} = A.$$

Donc $\varphi(x) > A$; on a trouvé x vérifiant la propriété voulue.
[Remarque : l'inégalité $0 < f(y) < \eta$ permet d'affirmer que $\frac{1}{f(y)} > \frac{1}{\eta}$ mais PAS que

$$0 > \frac{1}{f(y)}.$$

L'inverse d'un réel strictement positif est un réel strictement positif, jamais strictement négatif.]

Exercice 3.4

1. Soit x un nombre réel.

(a) Montrer que si $x^3 = 2$ alors $x < 2$.

Par contraposée, il suffit de montrer que si $x \geq 2$, alors $x^3 \neq 2$. Pour cela, supposons que $x \geq 2$ et démontrons que $x^3 \neq 2$.
La fonction cube est croissante donc, puisque $x \geq 2$, on a aussi $x^3 \geq 2^3 = 8 > 2$, et donc $x \neq 2$.

(b) Montrer que si $x + 1$ est le carré d'un entier impair, alors x est un entier multiple de 4.

On veut montrer l'implication

$$(x + 1 \text{ est le carré d'un entier impair}) \Rightarrow (x \text{ est un entier multiple de } 4).$$

Pour cela, supposons que $x + 1$ est le carré d'un entier impair et montrons que x est un entier multiple de 4. Soit n un entier impair tel que

$$x + 1 = n^2.$$

Puisque n est impair, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k+1$. Fixons un tel k.
On a alors

$$\begin{aligned} & x+1 = (2k+1)^2 = 4k^2+4k+1 \\ \Rightarrow \quad & x = 4k^2+4k = 4(k^2+k). \end{aligned}$$

Ainsi, x est un produit d'entiers (4 est entier et k^2+k aussi). C'est donc un entier. Cela démontre de plus que x est le produit de 4 et d'un entier (k^2+k) ; x est donc divisible par 4.

Soient a, b deux nombres réels.

(a) Montrer l'implication suivante : $(b-a>0) \Rightarrow (\exists \epsilon > 0, (b-a)^2 > \epsilon)$.

Supposons que $b-a>0$. Montrons $\exists \epsilon > 0, (b-a)^2 > \epsilon$.
Posons $\epsilon = \frac{(b-a)^2}{2}$. Comme $b-a \neq 0$, on a que $(b-a)^2 > 0$ et donc $\epsilon > 0$.
De plus, $1 > \frac{1}{2}$ et la multiplication par un réel strictement positif conserve les inégalités strictes.
On a donc

$$(b-a)^2 \times 1 > (b-a)^2 \times \frac{1}{2},$$

c'est-à-dire $(b-a)^2 > \epsilon$.

(b) Montrer l'implication suivante : $(\forall \epsilon > 0, \exists x \in \mathbb{R}, |a-x|+|b-x| < \epsilon) \Rightarrow (a=b)$.

Par contraposée, il suffit de montrer

$$(a \neq b) \Rightarrow (\exists \epsilon > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |a-x|+|b-x| \geq \epsilon).$$

Pour cela, supposons que $a \neq b$. Montrons que

$$\exists \epsilon > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |a-x|+|b-x| \geq \epsilon. \tag{3}$$

Soit $\epsilon = |a-b|$. Puisque $a \neq b$, on a $a-b \neq 0$ et donc $\epsilon > 0$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, d'après l'inégalité triangulaire en version « différence »,

$$|a-x|+|b-x| \geq |(a-x)-(b-x)| = |a-b| = \epsilon.$$

Notre réel ϵ vérifie donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, |a-x|+|b-x| \geq \epsilon,$$

ce qui démontre (3).