Corrigé des exercices 4.2 et 4.3

Irène Waldspurger

waldspurger@ceremade.dauphine.fr

Exercice 4.2

On considère les applications

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_- & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \to & x^2 \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_- & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \to & \sqrt{|x|} \end{array}.$$

Les applications $g \circ f$ et $f \circ g$ sont-elles bien définies ?

L'application $g \circ f$ n'est pas définie. En effet, l'ensemble d'arrivée de f, $\mathbb{R}_+$, n'est pas inclus dans l'ensemble de départ de g, $\mathbb{R}_-$.
L'application $f \circ g$ n'est pas non plus définie, pour la même raison.

Exercice 4.3

On considère les fonctions

$$f : \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \to & \ln(x) \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & \frac{x+1}{x-1}. \end{array}.$$

1. Les applications $f, g, g \circ f$ et $f \circ g$ sont-elles bien définies ?

La fonction f est bien définie : le fait que ln est définie sur $]0;+\infty[$ est une propriété de cours.
La fonction g n'est pas bien définie : son dénominateur s'annule en $x = 1$.
À cause cela, $f \circ g$ n'est pas bien définie : comme $g(1)$ n'est pas défini, $f(g(1))$ ne l'est pas non plus.
La fonction $g \circ f$ n'est pas non plus bien définie car $f(e) = 1$, donc $g \circ f(e) = g(1)$ n'est pas défini.

2. Si elles ne le sont pas, déterminer les ensembles de départ et d'arrivée pour qu'elles le soient.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{x+1}{x-1}$ est correctement défini dès lors que $x - 1 \neq 0$, c'est-à-dire dès lors que $x \neq 1$. La définition donnée pour g est donc valide sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g \circ f(x)$ est bien définie si f est bien définie en x et g est bien définie en $f(x)$. Or, pour tout x, f est bien définie en x dès lors que $x > 0$ et g est bien définie en $f(x)$ dès lors que $f(x) \neq 1$, c'est-à-dire $x \neq e$. On peut donc définir $g \circ f$ sur

$$]0;+\infty[\setminus\{e\}.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f \circ g(x)$ est bien définie si g est bien définie en x et f est bien définie en $g(x)$. Or, pour tout x, g est bien définie en x dès lors que $x \neq 1$ et f est bien définie en $g(x)$ dès lors que $g(x) > 0$.
On remarque que, pour tout $x \neq 1$,

$$\begin{aligned}
(g(x) > 0) &\iff (x + 1 > 0 \text{ et } x - 1 > 0) \text{ ou } (x + 1 < 0 \text{ et } x - 1 < 0) \\
&\iff (x > -1 \text{ et } x > 1) \text{ ou } (x < -1 \text{ et } x < 1) \\
&\iff (x > 1) \text{ ou } (x < -1) \\
&\iff (x \in] - \infty; -1[\cup]1; +\infty[).
\end{aligned}$$

La fonction $f \circ g$ peut donc être définie sur

$$(\mathbb{R} \setminus \{1\}) \cap (] - \infty; -1[\cup]1; +\infty[) =] - \infty; -1[\cup]1; +\infty[.$$