Connexité des ensembles de Julia

par Irène WALDSPURGER

Doctorante à l'École Normale Supérieure de Paris

RÉSUMÉ. *L'ensemble de Julia rempli associé à un polynôme P est $K_P = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ (P^n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée$\}$. Cet ensemble peut s'écrire comme une intersection d'ouverts emboîtés de la forme $P^{-k}(B)$, B étant un disque ouvert de $\mathbb{C}$. Pour P de degré 2 et de dérivée nulle en 0, nous décrirons la structure topologique de chaque $P^{-k}(B)$ en fonction de l'appartenance ou non de 0 aux $P^{-s}(B)$ pour $s \leqslant k$. À cet effet, nous démontrerons certaines propriétés des fonctions holomorphes du disque unité de $\mathbb{C}$ dans lui-même puis introduirons les concepts de revêtements et relèvements. En conclusion, nous montrerons que K_P est connexe s'il contient 0 et qu'il s'agit sinon d'une « poussière de Cantor », dont toutes les composantes connexes sont réduites à des points.*

MOTS-CLÉS : *distance de Poincaré, relèvements, revêtements, ensemble de Julia, poussière de Cantor.*

1. Introduction

Soit $c \in \mathbb{C}$ quelconque. On considère la fonction polynomiale suivante :

$$\begin{aligned} f_c : \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto z^2 + c \end{aligned}$$

On appelle **ensemble de Julia rempli** associé à f_c l'ensemble

$$K_{f_c} = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ (f_c^n(z))_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$$

Le but de cet article est de montrer que, si l'ensemble K_{f_c} contient 0, il est connexe et que, dans le cas contraire, il s'agit d'une « poussière de Cantor ». En particulier, dans ce dernier cas, chacune de ses composantes connexes est réduite à un point. Ce théorème a été démontré à la fois par Pierre Fatou et par Gaston Julia à la fin des années 1910, dans le cadre du concours pour un Grand Prix de l'Académie des Sciences.

Dans une première partie, nous définirons sur le disque unité de $\mathbb{C}$ une distance dite de Poincaré. Nous montrerons que toutes les fonctions holomorphes du disque dans lui-même sont 1-lipschitziennes pour cette distance et, sous certaines conditions, contractantes, c'est-à-dire α-lipschitziennes pour un certain $\alpha < 1$.

Nous définirons ensuite les revêtements et démontrerons deux théorèmes dits « de relèvement ». Ces théorèmes permettent d'étudier, pour un ouvert Ω, la connexité de $f_c^{-1}(\Omega)$ en fonction des propriétés de Ω.

Enfin, dans la troisième partie, nous démontrerons que, pour un certain $R \in \mathbb{R}_+^*$:

$$K_{f_c} = \bigcap_{k \geqslant 0} f_c^{-k}(B(0, R))$$

où les $f_c^{-k}(B(0, R))$ sont des ouverts emboîtés. Si $0 \in K_{f_c}$, d'après les résultats de la deuxième partie, tous les $f_c^{-k}(B(0, R))$, et donc K_{f_c} également, seront connexes. Ce ne sera pas le cas si $0 \notin K_{f_c}$ et nous montrerons à l'aide de la première partie que les diamètres des composantes connexes des $f_c^{-k}(B(0, R))$ tendent vers 0, ce qui nous permettra de conclure.

Nous admettrons le théorème de Riemann de la représentation conforme : si Ω est un ouvert connexe et simplement connexe de $\mathbb{C}$ différent de $\mathbb{C}$, il existe une transformation conforme de Ω vers le disque unité de $\mathbb{C}$.

La source principale de ce texte est constituée des notes écrites en 1983-1984 par Adrien Douady pour son cours *Systèmes dynamiques holomorphes*.

2. Applications holomorphes du disque unité dans lui-même

Définition 1. *Soient Ω_1 et Ω_2 deux ouverts non-vides de $\mathbb{C}$. Soit $W : \Omega_1 \to \Omega_2$ une fonction. On dira que W est une* ***transformation conforme de $\boldsymbol{\Omega_1}$ vers $\boldsymbol{\Omega_2}$*** *s'il s'agit d'une fonction holomorphe bijective dont la réciproque est également une fonction holomorphe.*

Nous noterons D le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$ et, pour tout $z_1 \in D$, poserons :

$$\begin{aligned} \phi_{z_1} : D &\to \quad \mathbb{C} \\ z &\to \frac{z_1 - z}{1 - \overline{z}_1 z}. \end{aligned}$$

Pour tout $z \in D$, $\phi_{z_1}(z) \in D$. La fonction ϕ_{z_1} est une transformation conforme de D vers D, telle que $\phi_{z_1}(0) = z_1$. Elle est sa propre réciproque.

2.1. *Distance de Poincaré*

Définition 2. *Pour tous $z_1, z_2 \in D$, on définit la distance de Poincaré de z_1 à z_2 par :*

$$d(z_1, z_2) = argth\left(\frac{|z_1 - z_2|}{|1 - \overline{z}_1 z_2|}\right)$$

Cette fonction est bien définie car, pour tous z_1, z_2 dans D, $\left|\dfrac{z_1 - z_2}{1 - \overline{z}_1 z_2}\right| = |\phi_{z_1}(z_2)| < 1$.

Le théorème suivant va nous permettre de montrer que d est bien une distance.

Théorème 1. *Pour tous $z_1, z_2 \in D$, on note $C_{z_1,z_2} = \{\gamma \in \mathcal{C}^1_{\text{pm}}([0;1], D)\ ;\ \gamma(0) = z_1$ et $\gamma(1) = z_2\}$ (où $\mathcal{C}^1_{\text{pm}}$ désigne ici l'ensemble des fonctions continues de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux). Alors :*

$$d(z_1, z_2) = \inf_{\gamma \in C_{z_1,z_2}} \int_0^1 \frac{|\gamma'(t)|}{1 - |\gamma(t)|^2} dt. \tag{1}$$

Démonstration Commençons par le cas où z_1 et z_2 sont des réels de $]-1;1[$, avec $z_1 \geqslant z_2$. Pour tout $x \in]-1;1[$, $\text{argth}(x) = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1+x}{1-x}$. Donc, si z_1 et z_2 sont des réels, avec $z_1 \geqslant z_2$:

$$d(z_1, z_2) = \text{argth}\frac{|z_1 - z_2|}{|1 - \overline{z}_1 z_2|} = \frac{1}{2} \ln \frac{(1+z_1)(1-z_2)}{(1-z_1)(1+z_2)}.$$

Pour tout chemin $\gamma \in C_{z_1,z_2}$:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{|\gamma'(t)|}{1 - |\gamma(t)|^2} dt &\geqslant \int_0^1 \frac{|\gamma'(t)|}{|1 - \gamma^2(t)|} dt \\
&\geqslant \left| \int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{1 - \gamma^2(t)} dt \right| \\
&= \left| \left[\frac{1}{2} \ln \frac{1+\gamma}{1-\gamma} \right]_0^1 \right| \\
&= \frac{1}{2} \ln \frac{(1+z_1)(1-z_2)}{(1-z_1)(1+z_2)} = d(z_1, z_2).
\end{aligned}$$

De plus, l'égalité est atteinte pour $\gamma : t \in [0;1] \mapsto (1-t)z_1 + t z_2$ donc :

$$d(z_1, z_2) = \inf_{\gamma \in C_{z_1,z_2}} \int_0^1 \frac{|\gamma'(t)|}{1 - |\gamma(t)|^2} dt.$$

Par symétrie, c'est également vrai pour $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ si $z_1 \leqslant z_2$.

Si $\psi : D \to D$ est une application de la forme $\psi = \phi_y$ pour un certain $y \in D$ ou $\psi : z \mapsto \alpha z$ pour un certain α tel que $|\alpha| = 1$, le calcul montre que :

$$d(\psi(z_1), \psi(z_2)) = d(z_1, z_2).$$

De plus, $\gamma \in C_{z_1,z_2} \mapsto \psi \circ \gamma \in C_{\psi(z_1),\psi(z_2)}$ est une bijection et, si $\gamma \in C_{z_1,z_2}$ et $\tilde{\gamma} = \psi \circ \gamma$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{|\gamma'(t)|}{1-|\gamma(t)|^2}dt = \int_0^1 \frac{|\tilde{\gamma}'(t)|}{1-|\tilde{\gamma}(t)|^2}dt$ donc :

$$\inf_{\gamma \in C_{z_1,z_2}} \int_0^1 \frac{|\gamma'(t)|}{1-|\gamma(t)|^2}dt = \inf_{\gamma \in C_{\psi(z_1),\psi(z_2)}} \int_0^1 \frac{|\gamma'(t)|}{1-|\gamma(t)|^2}dt.$$

Soient maintenant z_1 et z_2 des éléments quelconques de D. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $|\alpha| = 1$ et $\alpha\phi_{z_1}(z_2) \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned} d(z_1, z_2) &= d(\phi_{z_1}(z_1), \phi_{z_1}(z_2)) \\ &= d(0, \phi_{z_1}(z_2)) \\ &= d(0, \alpha\phi_{z_1}(z_2)) \\ &= \inf_{\gamma \in C_{0,\alpha\phi_{z_1}(z_2)}} \int_0^1 \frac{|\gamma'(t)|}{1-|\gamma(t)|^2}dt = \inf_{\gamma \in C_{z_1,z_2}} \int_0^1 \frac{|\gamma'(t)|}{1-|\gamma(t)|^2}dt \end{aligned}$$

donc l'égalité (1) est vérifiée. **cqfd**

Corollaire 1. *La fonction* $d : D^2 \to \mathbb{R}^+$ *est une distance.*

Démonstration La séparation et la symétrie sont claires.

L'inégalité triangulaire découle du fait que, si z_1, z_2 et z_3 sont des éléments de D et $\gamma_{1,2}$, $\gamma_{2,3}$ des éléments respectivement de C_{z_1,z_2} et C_{z_2,z_3}, alors, si on note $\gamma_{1,3} \in C_{z_1,z_3}$ le chemin formé par l'union de $\gamma_{1,2}$ et $\gamma_{2,3}$:

$$\int_0^1 \frac{|\gamma'_{1,3}(t)|}{1-|\gamma_{1,3}(t)|^2}dt = \int_0^1 \frac{|\gamma'_{1,2}(t)|}{1-|\gamma_{1,2}(t)|^2}dt + \int_0^1 \frac{|\gamma'_{2,3}(t)|}{1-|\gamma_{2,3}(t)|^2}dt.$$

Donc :

$$\begin{aligned} d(z_1, z_3) &= \inf_{\gamma \in C_{z_1,z_3}} \int_0^1 \frac{|\gamma'(t)|}{1-|\gamma(t)|^2}dt \\ &\leqslant \inf_{\gamma \in C_{z_1,z_2}} \int_0^1 \frac{|\gamma'(t)|}{1-|\gamma(t)|^2}dt + \inf_{\gamma \in C_{z_2,z_3}} \int_0^1 \frac{|\gamma'(t)|}{1-|\gamma(t)|^2}dt = d(z_1, z_2) + d(z_2, z_3). \end{aligned}$$

cqfd

Théorème 2. *Pour tous* z, z', z_1 *dans* D *:*

$$d(z, z') = d(\phi_{z_1}(z), \phi_{z_1}(z')).$$

Démonstration Nous l'avons vue en démontrant le théorème 1. **cqfd**

2.2. *Lemme de Schwarz*

Pour montrer que toute fonction holomorphe $W : D \to D$ est 1-lipschitzienne, il suffira, grâce à l'invariance de d par les fonctions ϕ_z, de montrer que, si $W(0) = 0$, alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $d(0, W(z)) \leqslant d(0, z)$, c'est-à-dire $|W(z)| \leqslant |z|$. Ce résultat porte le nom de « lemme de Schwarz ».

Théorème 3 (Principe du maximum)**.** *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe. Soit $W : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe non-constante. Alors $z \to |W(z)|$ n'atteint pas son maximum sur Ω.*

Démonstration Raisonnons par l'absurde et supposons que $|W|$ atteint son maximum en z_0. Notons $W(z) = \sum_n a_n (z - z_0)^n$ le développement en série entière de W au voisinage de z_0. Puisque $|W|$ atteint son maximum en z_0, tous les a_n sont nuls pour $n \geqslant 1$. En effet, sinon, $W(z) = W(z_0) + a_N (z - z_0)^N + o((z - z_0)^N)$ pour un certain N, avec $a_N \neq 0$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $a_N \lambda^N W(z_0)^{-1} \in \mathbb{R}^+$. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$ assez petit, $|W(z_0 + t\lambda)| = |W(z_0)|(1 + t^N a_N \lambda^N W(z_0)^{-1} + o(t^N)) > |W(z_0)|$. C'est absurde.

Ainsi, W est constante au voisinage de z_0. Comme Ω est connexe et comme l'ensemble des points au voisinage desquels W est constante est à la fois ouvert et fermé (puisque W est développable en série entière au voisinage de tout point de Ω), W est constante. **cqfd**

Théorème 4 (Lemme de Schwarz)**.** *Soit $W : D \to D$ une fonction holomorphe telle que $W(0) = 0$. Pour tout $z \in D$, $|W(z)| \leqslant |z|$.*

Démonstration Soit $V : D \to D$ telle que :

$$V(z) = W(z)/z \text{ si } z \neq 0 \text{ et } V(0) = W'(0).$$

Il s'agit d'une fonction holomorphe car elle est localement développable en série entière.

D'après le principe du maximum, puisque $\overline{\lim}_{|z| \to 1} |V(z)| \leqslant 1$, $|V(z)| \leqslant 1$ pour tout $z \in D$ (sinon $|V|$ admettrait un maximum $m > 1$ sur D mais ne serait pas constante). Donc, pour tout $z \in D$, $|W(z)| \leqslant |z|$. **cqfd**

2.3. *Lipschitziannité des fonctions holomorphes pour la métrique de Poincaré*

Théorème 5. *Soit $W : D \to D$ une application holomorphe. Alors W est 1-lipschitzienne pour la distance de Poincaré.*

Démonstration Soient z_1 et z_2 des éléments de D. D'après le théorème 2, $d(z_1, z_2) = d(0, \phi_{z_1}(z_2))$. Comme $d(W(z_1), W(z_2)) = d(W \circ \phi_{z_1}(0), W \circ \phi_{z_1}(\phi_{z_1}(z_2)))$, quitte à considérer $W \circ \phi_{z_1}$ à la place de W et $\phi_{z_1}(z_2)$ à la place de z_2, on peut supposer que $z_1 = 0$.

Quitte à composer W par $\phi_{W(0)}$, on peut également supposer que $W(0) = 0$. Il suffit alors de démontrer que $\operatorname{argth}(|z_2|) = d(0, z_2) \geqslant d(0, W(z_2)) = \operatorname{argth}(|W(z_2)|)$. D'après le lemme de Schwarz, $|W(z_2)| \leqslant |z_2|$ donc cette inégalité est bien vérifiée. **cqfd**

Théorème 6. *Soit $W : D \to D$ une application holomorphe telle que $\overline{W(D)} \subset D$. Alors il existe $\alpha \in [0; 1[$ tel que W est α-lipschitzienne pour la distance de Poincaré.*

Démonstration Soit $R < 1$ tel que $W(D)$ est incluse dans $B(0, R)$. Posons $\tilde{W} : z \to W(z)/R$. C'est une fonction holomorphe de D vers D, 1-lipschitizienne d'après le théorème précédent.

Soit $V_R : D \to D$ la fonction telle que $V_R(z) = Rz$ pour tout $z \in D$. Puisque $W = V_R \circ \tilde{W}$, il suffit de montrer que V_R est α-lipschitzienne pour un certain $\alpha \in [0; 1[$.

Pour tous z_1, z_2 dans $\overline{D}$:

$$\frac{R|1 - \overline{z}_1 z_2|}{|1 - R^2 \overline{z_1} z_2|} < 1.$$

Puisque la fonction $(z_1, z_2) \to \dfrac{R|1 - \overline{z}_1 z_2|}{|1 - R^2 \overline{z_1} z_2|}$ est continue sur $\overline{D}^2$ qui est compact, il existe $\alpha < 1$ tel que, pour tous z_1, z_2 dans D :

$$\frac{R|1 - \overline{z}_1 z_2|}{|1 - R^2 \overline{z_1} z_2|} \leqslant \alpha.$$

Alors, pour tous z_1, z_2 dans D :

$$\frac{|Rz_1 - Rz_2|}{|1 - (R\overline{z}_1)(Rz_2)|} \leqslant \alpha \frac{|z_1 - z_2|}{|1 - \overline{z}_1 z_2|}$$

Puisque la fonction argth est croissante et convexe sur $[0; 1[$ et vaut 0 en 0, pour tous z_1, z_2 dans D :

$$\begin{aligned} d(V_R(z_1), V_R(z_2)) &= \operatorname{argth}\left(\frac{|Rz_1 - Rz_2|}{|1 - (R\overline{z}_1)(Rz_2)|}\right) \\ &\leqslant \operatorname{argth}\left(\alpha \frac{|z_1 - z_2|}{|1 - \overline{z}_1 z_2|}\right) \\ &\leqslant \alpha \operatorname{argth}\left(\frac{|z_1 - z_2|}{|1 - \overline{z}_1 z_2|}\right) = \alpha\, d(z_1, z_2). \end{aligned}$$

Donc V_R est α-lipschitzienne et W aussi. **cqfd**

3. Revêtements et relèvements

Définition 3. *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert non-vide.*

On appelle **chemins** *dans* Ω *les applications continues* $\gamma : [0;1] \to \Omega$.

On appelle **lacet** *dans* Ω *tout chemin* γ *tel que* $\gamma(0) = \gamma(1)$.

Si γ_1 *et* γ_2 *sont des lacets dans* Ω*, on dit qu'ils sont* **homotopes** *s'il existe* $\Gamma : [0;1]^2 \to \Omega$ *continue telle que :*

$$\begin{aligned} &\forall t \in [0;1],\ \Gamma(t,0) = \Gamma(t,1) \\ &\forall s \in [0;1],\ \Gamma(0,s) = \gamma_1(s) \\ &\forall s \in [0;1],\ \Gamma(1,s) = \gamma_2(s). \end{aligned}$$

Une telle application Γ *s'appelle une* **homotopie de lacets**.

On dit que Ω *est* **simplement connexe** *si tout lacet dans* Ω *est homotope à un lacet constant, c'est-à-dire à un* $\gamma : [0;1] \to \Omega$ *tel que* $\gamma(t)$ *ne dépend pas de* t.

L'intérêt de cette notion de simple connexité est que, si $\Omega \subset \mathbb{C}$ est un ouvert connexe et simplement connexe, $f_c^{-1}(\Omega)$ est connexe si et seulement si $c \in \Omega$. Ce n'est pas vrai si Ω est uniquement supposé connexe. Plus précisément, nous démontrerons que, si $c \in \Omega$, $f_c^{-1}(\Omega)$ est un ouvert connexe et simplement connexe et, si $c \notin \Omega$, $f_c^{-1}(\Omega)$ est l'union de deux ouverts connexes simplement connexes disjoints.

Définition 4. *Soient* E *et* $\mathcal{B}$ *deux espaces métriques et* $f : E \to \mathcal{B}$ *une application continue surjective. On dit que* f *est un* **revêtement** *si, pour tout* $x_0 \in \mathcal{B}$*, il existe un voisinage ouvert* V *de* x_0 *dans* $\mathcal{B}$ *et un ensemble* X*, muni de la distance discrète, tels que* $V \times X$ *est homéomorphe à* $f^{-1}(V)$ *par une application* $\Phi : V \times X \to f^{-1}(V)$ *vérifiant la relation suivante :*

$$\forall x \in V \ \ \forall n \in X \quad f \circ \Phi(x,n) = x. \tag{2}$$

Si Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$ ne contenant pas c, alors $f_c : f_c^{-1}(\Omega) \to \Omega$ est un revêtement. En effet, tout $x_0 \in \Omega$ a deux antécédents par f_c, notés z_1 et z_2. D'après le théorème d'inversion locale, pour tout $i \in \{1,2\}$, comme $f_c'(z_i) \neq 0$, il existe un voisinage ouvert W_i de z_i et un voisinage ouvert V_i de x_0 tels que $f_{c,i} = f_{c|W_i} : W_i \to V_i$ est un homéomorphisme. On peut choisir les W_i disjoints et, alors, $V = V_1 \cap V_2$ est un voisinage ouvert de x_0 tel que $V \times \{1,2\}$ est homéomorphe à $f_c^{-1}(V)$ par l'application $\Phi : (z,i) \mapsto f_{c,i}^{-1}(z)$, qui vérifie bien la relation (2).

Dans la première sous-partie de cette deuxième partie, nous démontrerons deux théorèmes dits de relèvement. Dans les deux sous-parties suivantes, nous les utiliserons pour étudier les lacets et homotopies de $f_c^{-1}(\Omega)$ en fonction de ceux de Ω, d'abord lorsque $c \in \Omega$ puis lorsque $c \notin \Omega$. Nous en déduirons le résultat annoncé.

3.1. *Théorèmes de relèvement*

Théorème 7 (de relèvement des chemins)**.** *Soit* $f : E \to \mathcal{B}$ *un revêtement. Soient* $\gamma : [0;1] \to \mathcal{B}$ *un chemin et* x *un point de* E *tel que* $f(x) = \gamma(0)$*. Il existe un unique chemin* $\tilde{\gamma} : [0;1] \to E$ *tel que* $\tilde{\gamma}(0) = x$ *et* $f \circ \tilde{\gamma} = \gamma$.

Démonstration Soient, pour tout $s \in [0;1]$, V_s un voisinage ouvert de $\gamma(s)$ dans $\mathcal{B}$, X_s un ensemble discret et $\Phi_s : V_s \times X_s \to f^{-1}(V_s)$ un homéomorphisme comme dans la définition d'un revêtement. Soit de plus W_s un ouvert de $[0;1]$ contenant s tel que $\gamma(W_s) \subset V_s$.

Montrons d'abord l'existence.

Soit $\mathcal{N} > 0$ tel que, pour tout $t \in [0;1]$, $[t - \frac{1}{\mathcal{N}}; t + \frac{1}{\mathcal{N}}] \cap [0;1] \subset W_s$ pour un certain $s \in [0;1]$; un tel $\mathcal{N}$ existe car $[0;1]$ est compact et $\bigcup_{s \in [0;1]} W_s = [0;1]$.

Définissons par récurrence sur $n = 0, ..., \mathcal{N}$ des fonctions continues $\tilde{\gamma}_n : [0; \frac{n}{\mathcal{N}}] \to E$ telles que $\tilde{\gamma}_n(0) = x$ et $f \circ \tilde{\gamma}_n = \gamma_{|[0;\frac{n}{\mathcal{N}}]}$.

- Posons $\tilde{\gamma}_0(0) = x$.

- Pour $n \geqslant 0$, si $\tilde{\gamma}_n$ est définie, définissons $\tilde{\gamma}_{n+1}$ de la façon qui suit.

Si $t \in [0; \frac{n}{\mathcal{N}}]$, on pose $\tilde{\gamma}_{n+1}(t) = \tilde{\gamma}_n(t)$.

Soit $s \in [0;1]$ tel que $[\frac{n}{\mathcal{N}}; \frac{n+1}{\mathcal{N}}] \subset W_s$. Puisque $f \circ \tilde{\gamma}_n(\frac{n}{\mathcal{N}}) = \gamma(\frac{n}{\mathcal{N}}) \in V_s$, $\tilde{\gamma}_n(\frac{n}{\mathcal{N}}) \in f^{-1}(V_s)$ donc on dispose de $v \in V_s, y \in X_s$ tels que $\Phi_s(v, y) = \tilde{\gamma}_n(\frac{n}{\mathcal{N}})$. D'après l'égalité (2), $v = f(\tilde{\gamma}_n(\frac{n}{\mathcal{N}})) = \gamma(\frac{n}{\mathcal{N}})$.

On pose $\tilde{\gamma}_{n+1}(t) = \Phi_s(\gamma(t), y)$ pour tout $t \in [\frac{n}{\mathcal{N}}; \frac{n+1}{\mathcal{N}}]$. La fonction $\tilde{\gamma}_{n+1}$ ainsi définie est continue, vaut x en 0, et est telle que $f \circ \tilde{\gamma}_{n+1} = \gamma_{|[0;\frac{n+1}{\mathcal{N}}]}$.

La fonction $\tilde{\gamma}_{\mathcal{N}}$, définie sur $[0;1]$, vérifie bien les conditions voulues.

Montrons maintenant l'unicité. Soient $\tilde{\gamma}_1$ et $\tilde{\gamma}_2$ deux fonctions vérifiant les conditions du théorème. Montrons qu'elles sont égales.

Soit $\mathcal{T} = \{t \in [0;1] \text{ tq } \tilde{\gamma}_1(t) = \tilde{\gamma}_2(t)\}$. Cet ensemble est fermé dans $[0;1]$ (puisque $\tilde{\gamma}_1$ et $\tilde{\gamma}_2$ sont continues) et non vide (il contient 0). Montrons qu'il est également ouvert.

Soit $t \in \mathcal{T}$. Soit $y \in X_t$ tel que $\Phi_t(\gamma(t), y) = \tilde{\gamma}_1(t) = \tilde{\gamma}_2(t)$. Comme Φ_t est un homéomorphisme et $V_t \times \{y\}$ un ouvert de $V_t \times X_t$, $\Phi_t(V_t \times \{y\})$ est un ouvert de $f^{-1}(V_t)$ et on dispose de U, voisinage de t dans $[0;1]$ tel que $\tilde{\gamma}_1(U), \tilde{\gamma}_2(U) \subset \Phi_t(V_t \times \{y\})$ pour $i = 1, 2$. Pour tout $t' \in U$ et tout $i \in \{1, 2\}$, il existe $x' \in V_t$ tel que $\tilde{\gamma}_i(t') = \Phi_t(x', y)$ et :

$$x' = f \circ \Phi_t(x', y) = f(\tilde{\gamma}_i(t')) = \gamma(t')$$

Alors, pour tout $t' \in U$, $\tilde{\gamma}_1(t') = \Phi_t(\gamma(t'), y) = \tilde{\gamma}_2(t')$, donc $U \subset \mathcal{T}$.

Puisque $[0;1]$ est connexe, $\mathcal{T} = [0;1]$ et $\tilde{\gamma}_1 = \tilde{\gamma}_2$. **cqfd**

Théorème 8 (de relèvement des homotopies)**.** *Soit $f : E \to \mathcal{B}$ un revêtement. Soient $\Gamma : [0;1] \times [0;1] \to \mathcal{B}$ une application continue et x un élément de E tels que $f(x) = \Gamma(0,0)$. Il existe une unique application continue $\tilde{\Gamma} : [0;1] \times [0;1] \to E$ telle que $\tilde{\Gamma}(0,0) = x$ et $f \circ \tilde{\Gamma} = \Gamma$.*

Démonstration Montrons d'abord l'existence.

Soient, comme dans la démonstration précédente, pour tout $r \in [0;1]^2$, V_r un voisinage de $\Gamma(r)$, W_r un voisinage de r tel que $\Gamma(W_r) \subset V_r$, X_r un ensemble discret et $\Phi_r : V_r \times X_r \to f^{-1}(V_r)$ un homéomorphisme vérifiant (2). Soit $\mathcal{N} \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $(t,s) \in [0;1]^2$, $[t - \frac{1}{\mathcal{N}}; t + \frac{1}{\mathcal{N}}] \times [s - \frac{1}{\mathcal{N}}; s + \frac{1}{\mathcal{N}}] \cap [0;1]^2 \subset W_r$ pour un certain r.

Définissons par récurrence sur $k = 0, ..., \mathcal{N}$ des fonctions continues $\tilde{\Gamma}_k : [0; \frac{k}{\mathcal{N}}] \times [0;1] \to E$ telles que $\tilde{\Gamma}(0,0) = x$ et $f \circ \tilde{\Gamma}_k = \Gamma_{|[0;\frac{k}{\mathcal{N}}] \times [0;1]}$.

- Pour $k = 0$: posons $\tilde{\Gamma}_0(0,t) = \gamma(t)$, γ étant l'unique chemin dans E tel que $\gamma(0) = x$ et $f \circ \gamma = \Gamma(0,.)$.

- Si nous avons défini $\tilde{\Gamma}_k$, définissons $\tilde{\Gamma}_{k+1}$.

Si $(t,s) \in [0; \frac{k}{\mathcal{N}}] \times [0;1]$, posons $\tilde{\Gamma}_{k+1}(t,s) = \tilde{\Gamma}_k(t,s)$.

Définissons $\tilde{\Gamma}_{k+1}$ sur chaque $]\frac{k}{\mathcal{N}}; \frac{k+1}{\mathcal{N}}] \times [0; \frac{l}{\mathcal{N}}]$, par récurrence sur $l \in \{0, ..., \mathcal{N}\}$.

Pour $l = 0$: on pose $\tilde{\Gamma}_{k+1}(s,0) = \gamma(s)$ où $\gamma : [\frac{k}{\mathcal{N}}; \frac{k+1}{\mathcal{N}}] \to E$ est l'application continue telle que $\gamma(\frac{k}{\mathcal{N}}) = \tilde{\Gamma}_k(\frac{k}{\mathcal{N}}, 0)$ et $f \circ \gamma = \Gamma(.,0)$ (dont l'existence est assurée par le théorème 7).

Si $\tilde{\Gamma}_{k+1}$ est définie sur $]\frac{k}{\mathcal{N}}; \frac{k+1}{\mathcal{N}}] \times [0; \frac{l}{\mathcal{N}}]$, définissons-la sur $]\frac{k}{\mathcal{N}}; \frac{k+1}{\mathcal{N}}] \times]\frac{l}{\mathcal{N}}; \frac{l+1}{\mathcal{N}}]$. Soit r tel que $[\frac{k}{\mathcal{N}}; \frac{k+1}{\mathcal{N}}] \times [\frac{l}{\mathcal{N}}; \frac{l+1}{\mathcal{N}}] \subset W_r$.

Les composantes connexes de $\Gamma([\frac{k}{\mathcal{N}}; \frac{k+1}{\mathcal{N}}] \times [\frac{l}{\mathcal{N}}; \frac{l+1}{\mathcal{N}}]) \times X_r$ sont les $\Gamma([\frac{k}{\mathcal{N}}; \frac{k+1}{\mathcal{N}}] \times [\frac{l}{\mathcal{N}}; \frac{l+1}{\mathcal{N}}]) \times \{y\}$ pour $y \in X_r$. Les applications Φ_r^{-1} et $\tilde{\Gamma}_{k+1}$ sont continues et $\{\frac{k}{\mathcal{N}}\} \times [\frac{l}{\mathcal{N}}; \frac{l+1}{\mathcal{N}}] \cup [\frac{k}{\mathcal{N}}; \frac{k+1}{\mathcal{N}}] \times \{\frac{l}{\mathcal{N}}\}$ est connexe, donc $\Phi_r^{-1} \circ \tilde{\Gamma}_{k+1}(\{\frac{k}{\mathcal{N}}\} \times [\frac{l}{\mathcal{N}}; \frac{l+1}{\mathcal{N}}] \cup [\frac{k}{\mathcal{N}}; \frac{k+1}{\mathcal{N}}] \times \{\frac{l}{\mathcal{N}}\})$ est connexe. Ce dernier ensemble est donc inclus dans $\Gamma([\frac{k}{\mathcal{N}}; \frac{k+1}{\mathcal{N}}] \times [\frac{l}{\mathcal{N}}; \frac{l+1}{\mathcal{N}}]) \times \{y\}$ pour un certain $y \in X_r$. Posons alors, pour tout $(s,t) \in [\frac{k}{\mathcal{N}}; \frac{k+1}{\mathcal{N}}] \times [\frac{l}{\mathcal{N}}; \frac{l+1}{\mathcal{N}}]$:

$$\tilde{\Gamma}_{k+1}(s,t) = \Phi_r(\Gamma(s,t), y)$$

Cette définition coïncide avec l'ancienne sur $\{\frac{k}{\mathcal{N}}\} \times [\frac{l}{\mathcal{N}}; \frac{l+1}{\mathcal{N}}] \cup [\frac{k}{\mathcal{N}}; \frac{k+1}{\mathcal{N}}] \times \{\frac{l}{\mathcal{N}}\}$.

L'application ainsi définie est continue et vérifie $f \circ \tilde{\Gamma}_{k+1} = \Gamma$.

La fonction $\tilde{\Gamma}_{\mathcal{N}}$ vérifie les propriétés requises : l'existence est démontrée.

L'unicité est un corollaire du théorème 7 : si $\tilde{\Gamma}$ et $\tilde{\Gamma}'$ vérifient les conditions voulues, $\tilde{\Gamma}(0,s) = \tilde{\Gamma}'(0,s)$ pour tout s car $\tilde{\Gamma}(0,.)$ et $\tilde{\Gamma}'(0,.)$ sont deux chemins dans E tels que $\tilde{\Gamma}(0,0) = x = \tilde{\Gamma}'(0,0)$ et $f \circ \tilde{\Gamma}(0,.) = \Gamma(0,.) = f \circ \tilde{\Gamma}'(0,.)$.

Pour tout $t \in [0;1]$, $\tilde{\Gamma}(.,t)$ et $\tilde{\Gamma}'(.,t)$ sont des chemins de E tels que $\tilde{\Gamma}(0,t) = \tilde{\Gamma}'(0,t)$ et $f \circ \tilde{\Gamma}(.,t) = \Gamma(.,t) = f \circ \tilde{\Gamma}'(.,t)$. Ils sont donc égaux :

$$\forall s,t \in [0;1]^2, \tilde{\Gamma}(s,t) = \tilde{\Gamma}'(s,t).$$

cqfd

Remarque. *Dans les théorèmes 7 et 8, on peut remplacer* $[0;1]$ *par un segment quelconque de* $\mathbb{R}$ *et* $[0;1]^2$ *par un rectangle quelconque de* $\mathbb{R}^2$.

3.2. *Image réciproque d'un ouvert simplement connexe contenant* c

Théorème 9. *Soit* Ω *un ouvert connexe simplement connexe de* $\mathbb{C}$ *contenant* c*. Alors* $E = f_c^{-1}(\Omega)$ *est un ouvert connexe simplement connexe.*

Démonstration Si $\Omega = \mathbb{C}$, c'est vrai ; nous supposerons donc dans la suite $\Omega \neq \mathbb{C}$ (afin de pouvoir appliquer le théorème de Riemann).

Puisque f_c est continue, E est ouvert. Montrons tout d'abord qu'il est connexe.

Soit $x \in E$ quelconque. Posons $y = f_c(x) \in \Omega$. Puisque Ω est connexe, il existe $\gamma : [0;1] \to \Omega$ un chemin tel que $\gamma(0) = y$ et $\gamma(1) = c$. Quitte à restreindre γ à $[0;T]$ pour un certain $T \leqslant 1$, on peut supposer que $\gamma(t) \neq c$ pour tout $t \in [0;1[$.

La fonction f_c définit un revêtement de $\mathbb{C} - \{0\}$ vers $\mathbb{C} - \{c\}$. D'après le théorème de relèvement des chemins, pour tout $T < 1$, puisque $\gamma([0;T]) \subset \mathbb{C} - \{c\}$, il existe un chemin $\tilde{\gamma}_T : [0;T] \to \mathbb{C} - \{0\}$ tel que $\tilde{\gamma}(0) = x$ et $f_c \circ \tilde{\gamma}_T = \gamma_{|[0;T]}$. Selon la propriété d'unicité, deux tels chemins $\tilde{\gamma}_T$ et $\tilde{\gamma}_{T'}$ coïncident sur $[0; \min(T,T')]$. Le chemin $\tilde{\gamma} : [0;1[\to \mathbb{C}$ tel que $\tilde{\gamma}(T) = \tilde{\gamma}_T(T)$ est donc bien défini et continu. Il est tel que $f_c \circ \tilde{\gamma} = \gamma_{|[0;1[}$ donc :

$$c = \lim_{t \to 1} f_c(\tilde{\gamma}(t)) = \lim_{t \to 1} \tilde{\gamma}(t)^2 + c \text{ et } \lim_{t \to 1} \tilde{\gamma}(t) = 0.$$

On peut donc prolonger $\tilde{\gamma}$ en 1, par 0. Le chemin ainsi obtenu est continu, relie x à 0, et est dans E puisque, pour tout $t \in [0;1]$, $f_c(\tilde{\gamma}(t)) = \gamma(t) \in \Omega$.

L'ensemble E est donc connexe par arcs.

Montrons maintenant qu'il est simplement connexe. Fixons une transformation conforme $W : \Omega \to D$. Une telle application existe d'après le théorème de Riemann de la représentation conforme. Quitte à composer W par $\phi_{W(c)}$, on peut supposer que $W(c) = 0$.

Soit $\gamma : [0;1] \to E$ un lacet de E. Nous allons montrer qu'il existe une homotopie envoyant γ sur le lacet constant en 0. Commençons par le cas où $\gamma(0) = \gamma(1) = 0$. On a alors aussi $W \circ f_c \circ \gamma(0) = W \circ f_c \circ \gamma(1) = 0$.

Soit $\epsilon > 0$ quelconque. Soit $T = \{x \in [0;1], |W \circ f_c \circ \gamma(x)| > \epsilon/2\} \subset]0;1[$; c'est un ouvert de $\mathbb{R}$ donc une union dénombrable d'intervalles ouverts non-vides disjoints : $T = \underset{n}{\cup} T_n$, avec $T_n =]a_n; b_n[$ pour tout n. Puisque $W \circ f_c \circ \gamma$ est uniformément continue, il existe η tel que :

$$\forall (x,y) \in [0;1]^2,\ (|W \circ f_c \circ \gamma(x) - W \circ f_c \circ \gamma(y)| > \epsilon/2) \Rightarrow (|x - y| > \eta).$$

Tous les T_n contenant un x tel que $|W \circ f_c \circ \gamma(x)| > \epsilon$ sont de longueur au moins η, puisque, pour tout n, $|W \circ f_c \circ \gamma(a_n)| \leqslant \epsilon/2$ donc $|x - a_n| > \eta$. Ces intervalles sont donc en nombre fini. Soient $n_1, ..., n_r$ leurs indices.

Pour tout $k \leqslant r$, notons $\delta_k = W \circ f_c \circ \gamma_{|[a_{n_k}; b_{n_k}]}$ et posons :

$$\begin{array}{rccc} \Delta_k : & [0;1] \times [a_{n_k}; b_{n_k}] & \to & D \\ & (t,s) & \mapsto & ((1-t) + t \min(1, \dfrac{\epsilon}{|\delta_k(s)|})) \times \delta_k(s). \end{array}$$

Comme Δ_k ne s'annule pas, $W^{-1}(\Delta_k(t,s)) \neq c$ pour tout (t,s) et, d'après le théorème de relèvement des homotopies, il existe une unique application continue $\Gamma_k : [0;1] \times [a_{n_k}; b_{n_k}] \to E$ telle que $f_c \circ \Gamma_k = W^{-1} \circ \Delta_k$ et telle que $\Gamma_k(0,s) = \gamma_{|[a_{n_k}; b_{n_k}]}(s)$ pour tout $s \in [a_{n_k}; b_{n_k}]$.

Si $s = a_{n_k}$ ou $s = b_{n_k}$, $t \mapsto W^{-1} \circ \Delta_k(t,s)$ est constante (car $\dfrac{\epsilon}{|\delta_k(s)|} > 1$) donc, d'après l'unicité du théorème 7, $\Gamma_k(t,s) = \gamma(s) \forall t \in [0;1]$.

Posons :

$$\begin{array}{rcccl} \Gamma : & [0;1] \times [0;1] & \to & E & \\ & (t,s) & \mapsto & \Gamma_k(t,s) & \text{si } s \in [a_{n_k}; b_{n_k}] \\ & & & \gamma(s) & \text{sinon.} \end{array}$$

La fonction Γ est continue car elle est continue sur chacun des $[0;1] \times [a_{n_k}; b_{n_k}]$ et sur $[0;1] \times [0;1] - \underset{k}{\cup}]a_{n_k}; b_{n_k}[$, qui sont des ensembles fermés dont l'union est $[0;1] \times [0;1]$. Il s'agit donc d'une homotopie telle que :

$$\forall s \in [0;1], \Gamma(0,s) = \gamma(s) \ ;$$
$$\forall s \in [0;1], |W \circ f_c \circ \Gamma(1,s)| \leqslant \epsilon.$$

La deuxième propriété provient du fait que, si $s \in [a_{n_k}; b_{n_k}]$ pour un certain k, alors $|W \circ f_c \circ \Gamma(1,s)| = |\Delta_k(1,s)| = \min(|\delta_k(s)|, \epsilon) \leqslant \epsilon$ et, si s n'appartient à aucun des $[a_{n_k}; b_{n_k}]$, alors $|W \circ f_c \circ \gamma(s)| \leqslant \epsilon$, par définition des $n_1, ..., n_r$.

Soit $\lambda > 0$ un réel tel que $\overline{B(0,\lambda)} \subset f_c^{-1}(\Omega) = E$. Soit ϵ tel que $W^{-1}(\overline{B(0,\epsilon)}) \subset \overline{B(c,\lambda^2)}$. Si Γ est l'homotopie définie comme précédemment, alors, pour tout $s \in [0;1]$:

$$\begin{aligned} & W \circ f_c \circ \Gamma(1,s) \in \overline{B(0,\epsilon)} \\ \Rightarrow\, & f_c \circ \Gamma(1,s) \in \overline{B(c,\lambda^2)} \\ \Rightarrow\, & |\Gamma(1,s)| \leqslant \lambda. \end{aligned}$$

Posons $\tilde{\Gamma}(t,s) = (1-t)\Gamma(1,s)$ pour tout $(t,s) \in [0;1]$. Pour tout (t,s), $\tilde{\Gamma}(t,s) \in \overline{B(0,\lambda)} \subset E$. Ainsi, $\tilde{\Gamma}$ est une homotopie de lacets de E qui transforme $s \mapsto \Gamma(1,s)$ en un lacet constant en 0. En la composant avec Γ, homotopie de lacets qui transforme γ en $s \mapsto \Gamma(1,s)$, on obtient une homotopie de γ vers un lacet constant.

Généralisons au cas où $\gamma(0) = \gamma(1) \neq 0$. Soit $\delta : [0;1/4] \to E$ un chemin tel que $\delta(0) = 0$ et $\delta(1/4) = \gamma(0)$. Posons :

$$\begin{aligned} \Gamma(t,s) &= \gamma(1/2 + \frac{2s-1}{2-t}) \text{ si } t/4 \leqslant s \leqslant 1 - t/4 \\ &= \delta(s + \frac{1-t}{4}) \text{ si } s < t/4 \\ &= \delta(1 - s + \frac{1-t}{4}) \text{ si } s > 1 - t/4. \end{aligned}$$

La fonction Γ est une homotopie de lacet qui transforme γ en un lacet $\tilde{\gamma} = \Gamma(1,.)$. Comme $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{\gamma}(1) = 0$, $\tilde{\gamma}$ est homotope à un lacet constant donc γ également et E est bien simplement connexe. **cqfd**

3.3. *Image réciproque d'un ouvert simplement connexe ne contenant pas c*

Théorème 10. *Soit Ω un ouvert connexe simplement connexe de $\mathbb{C}$, non-vide, ne contenant pas c. Il existe E_1 et E_2 deux ouverts de $\mathbb{C}$ connexes, simplement connexes, disjoints et non-vides tels que $f_c^{-1}(\Omega) = E_1 \cup E_2$. De plus, la restriction de f_c à E_1 (resp. E_2), notée f_1 (resp. f_2), est une transformation conforme de E_1 (resp. E_2) vers Ω.*

Démonstration Soit $z_0 \in \Omega$. Puisque $z_0 \neq c$, ce point a deux antécédents par f_c. Notons-les x_1 et x_2. Soit, pour $i = 1, 2$:

$$E_i = \{x \in f_c^{-1}(\Omega) \text{ tq } \exists \gamma \in \mathcal{C}^0([0;1], f_c^{-1}(\Omega)), \gamma(0) = x_i, \gamma(1) = x\}.$$

Montrons que E_1 et E_2 sont des ouverts connexes, simplement connexes et non-vides, qui forment une partition de $f_c^{-1}(\Omega)$.

Ces ensembles sont ouverts : si $x \in E_i$, si $r > 0$ est tel que $D(x,r) \subset f_c^{-1}(\Omega)$, alors $D(x,r) \subset E_i$.

Ces ouverts sont non-vides : $x_i \in E_i$.

Ces ouverts sont disjoints. En effet, supposons par l'absurde qu'il existe $y \in E_1 \cap E_2$. Puisque y est relié à x_1 et à x_2 par un chemin de $f_c^{-1}(\Omega)$, x_1 et x_2 sont reliés par un chemin de $f_c^{-1}(\Omega)$. Soit $\gamma \in \mathcal{C}^0([0;1], f_c^{-1}(\Omega))$ tel que $\gamma(0) = x_1$ et $\gamma(1) = x_2$.

Le chemin $f_c \circ \gamma$ de Ω est un lacet : $f_c(\gamma(0)) = z_0 = f_c(\gamma(1))$. Soit Γ une homotopie déformant $f_c \circ \gamma$ sur un lacet constant (d'unique valeur $Z \in \Omega$). Elle existe car Ω est simplement connexe. Soit $G : [0;1]^2 \mapsto f_c^{-1}(\Omega)$ l'application continue telle que $G(0,0) = \gamma(0)$ et $f_c \circ G = \Gamma$. Pour tout $s \in [0;1]$, $G(0,s) = \gamma(s)$ d'après l'unicité du théorème 7.

Pour tout s, $f_c \circ G(1,s) = \Gamma(1,s) = Z$ donc $G(1,s) \in f_c^{-1}(\{Z\})$. Comme $f_c^{-1}(\{Z\})$ est un ensemble à deux éléments et $G(1,.)$ est continue, $G(1,.)$ est constante. En particulier, $G(1,0) = G(1,1)$.

Pour tout $t \in [0;1]$, $f_c(G(t,0)) = \Gamma(t,0) = \Gamma(t,1) = f_c(G(t,1))$ donc $G(t,0) = G(t,1)$ ou $G(t,0) = -G(t,1)$. Puisque G ne s'annule pas, la fonction $t \to G(t,0)/G(t,1)$ est constante. Elle vaut $G(0,0)/G(0,1) = x_1/x_2 = -1$ donc $G(1,0)/G(1,1) = -1$, ce qui est absurde car $t \mapsto G(1,t)$ est constante.

Donc E_1 et E_2 sont disjoints.

Montrons que $E_1 \cup E_2 = f_c^{-1}(\Omega)$. Soit $x \in f_c^{-1}(\Omega)$.

Soit $\gamma : [0;1] \to \Omega$ un chemin de $f_c(x)$ à z_0. Il existe car Ω est connexe. Soit $\tilde{\gamma} : [0;1] \to f_c^{-1}(\Omega)$ le chemin tel que $\tilde{\gamma}(0) = x$ et $f_c \circ \tilde{\gamma} = \gamma$. Puisque $f_c(\tilde{\gamma}(1)) = z_0$, $\tilde{\gamma}(1) = x_1$ ou x_2 et x appartient à E_1 ou à E_2.

L'ensemble E_1 est connexe : deux points x et x' de E_1 sont reliés à x_1 par des chemins de $f_c^{-1}(\Omega)$. Tous les points de ces chemins sont dans E_1 puisqu'ils sont également reliés à x_1. Les points x et x' sont donc reliés à x_1 par des chemins de E_1, donc reliés entre eux par un chemin de E_1. Ainsi, E_1 est connexe et E_2 également, pour la même raison.

Nous avons démontré que E_1 et E_2 constituent une partition de $f_c^{-1}(\Omega)$ en ouverts connexes. Montrons maintenant que la restriction de f_c à chacun de ces ensembles définit une transformation conforme vers Ω. La fonction f_c est bien holomorphe. De plus, elle est bijective de E_1 vers Ω. En effet, deux antécédents par f_c d'un même point ne sont pas reliés par un chemin de $f_c^{-1}(\Omega)$, sinon E_1 et E_2 ne seraient pas disjoints. Ils ne peuvent donc pas être tous deux inclus dans E_1, qui est connexe par arcs, et f_c est injective sur E_1. Elle est également surjective, sinon il existerait dans Ω un point dont aucun antécédent ne serait dans E_1, c'est-à-dire dont les deux antécédents seraient dans E_2, ce qui est impossible pour la même raison.

La restriction de f_c à E_1 est de réciproque holomorphe car f_c' ne s'annule pas sur $f_c^{-1}(\Omega)$. C'est donc une transformation conforme de E_1 vers Ω. De même pour la restriction à E_2.

Enfin, puisque E_1 et E_2 sont homéomorphes à Ω, qui est simplement connexe, ils sont tous deux simplement connexes. **cqfd**

4. Démonstration du théorème

4.1. *Connexité d'une intersection de fermés emboîtés*

Lemme 1. *Si Ω est un sous-ensemble connexe de $\mathbb{C}$, alors $\overline{\Omega}$ est également connexe.*

Démonstration Soient A et B deux fermés disjoints de $\overline{\Omega}$ (donc de $\mathbb{C}$, $\overline{\Omega}$ étant fermé) tels que $A \cup B = \overline{\Omega}$. Montrons que $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$.

Comme $A \cap \Omega$ et $B \cap \Omega$ sont deux fermés disjoints de Ω d'union égale à Ω, qui est connexe, $A \cap \Omega = \Omega$ ou $B \cap \Omega = \Omega$. Supposons par symétrie que $A \cap \Omega = \Omega$. Alors A est un fermé contenant Ω et inclus dans $\overline{\Omega}$. Par définition de l'adhérence, $A = \overline{\Omega}$ et $B = \emptyset$.

Lemme 2. *Si $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fermés bornés connexes de $\mathbb{C}$ tels que, pour tout n, $F_{n+1} \subset F_n$, alors $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est connexe.*

Démonstration Notons $G = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$. C'est un ensemble fermé et borné.

Supposons par l'absurde qu'il existe A et B deux fermés de G disjoints, non-vides et tels que $A \cup B = G$. Comme A et B sont compacts, le réel $d(A,B) = \min\{|z_A - z_B|, z_A \in A, z_B \in B\} > 0$ est bien défini. Soit $\epsilon > 0$ tel que $2\epsilon \leqslant d(A,B)$.

Posons $A_\epsilon = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ d(z,A) < \epsilon\}$ et $B_\epsilon = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ d(z,B) < \epsilon\}$. Ce sont deux ouverts disjoints de $\mathbb{C}$. L'ensemble $\Delta = \mathbb{C} - A_\epsilon - B_\epsilon$ est fermé.

Pour tout n, $F_n \cap \Delta$ est non-vide, sinon $F_n = (F_n \cap A_\epsilon) \cup (F_n \cap B_\epsilon)$ et, comme les ouverts disjoints $F_n \cap A_\epsilon$ et $F_n \cap B_\epsilon$ sont non-vides (ils contiennent respectivement $G \cap A = A$ et $G \cap B = B$), F_n n'est pas connexe.

Comme intersection de compacts emboîtés non-vides, $G \cap \Delta = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} (F_n \cap \Delta)$ est non-vide, ce qui est absurde car $G = A \cup B \subset A_\epsilon \cup B_\epsilon = \mathbb{C} - \Delta$. **cqfd**

4.2. *Connexité de K_{f_c} quand $0 \in K_{f_c}$*

Comme $|f_c(z)| \sim |z|^2$ quand $|z| \to \infty$, il existe $R \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$(|z| \geqslant R) \Longrightarrow (|f_c(z)| \geqslant |z| + 1).$$

Pour tout z, si, pour un certain $k \geqslant 0$, $|f_c^k(z)| \geqslant R$, alors $|f_c^{k+m}(z)| \geqslant R + m$ pour tout $m \geqslant 0$ donc la suite $(f_c^n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée. En revanche, si, pour tout $k \geqslant 0$, $|f_c^k(z)| < R$, la suite est bornée.

L'ensemble de Julia rempli peut donc s'écrire :

$$K_{f_c} = \bigcap_{k\geqslant 0} f_c^{-k}(B(0,R))$$

Remarquons que $\overline{f_c^{-1}(B(0,R))} \subset B(0,R)$: sinon, il existe une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $f_c^{-1}(B(0,R))$ convergeant vers un complexe z_∞ tel que $|z_\infty| \geqslant R$. Comme $f_c(z_n) \to f_c(z_\infty)$ et $|f_c(z_\infty)| \geqslant |z_\infty| + 1 \geqslant R+1 > R$, $|f_c(z_n)| \geqslant R$ à partir d'un certain rang et $z_n \notin f_c^{-1}(B(0,R))$ pour n assez grand, ce qui est absurde.

En particulier, $f_c^{-1}(B(0,R)) \subset B(0,R)$ et, pour tout $k \geqslant 0$,

$$f_c^{-(k+1)}(B(0,R)) = f_c^{-k}(f_c^{-1}(B(0,R))) \subset f_c^{-k}(B(0,R)).$$

On a donc écrit K_{f_c} sous la forme d'une intersection d'ouverts emboîtés.

De plus :

$$K_{f_c} = \bigcap_{k\geqslant 0} \overline{f_c^{-k}(B(0,R))}.$$

En effet, $\bigcap_{k\geqslant 0} f_c^{-k}(B(0,R)) \subset \bigcap_{k\geqslant 0} \overline{f_c^{-k}(B(0,R))}$ et, pour tout $k \geqslant 0$, puisque f_c^k est continue, $\overline{f_c^{-(k+1)}(B(0,R))} \subset f_c^{-k}(\overline{f_c^{-1}(B(0,R))}) \subset f_c^{-k}(B(0,R))$ donc $\bigcap_{k\geqslant 0} \overline{f_c^{-k}(B(0,R))} = \bigcap_{k\geqslant 0} \overline{f_c^{-(k+1)}(B(0,R))} \subset \bigcap_{k\geqslant 0} f_c^{-k}(B(0,R))$. **cqfd**

Théorème 11. *Si K_{f_c} contient 0, K_{f_c} est fermé et connexe.*

Démonstration Si K_{f_c} contient 0, alors, pour tout $k \geqslant 0$, $f_c^{-(k+1)}(B(0,R))$ contient 0 donc $f_c^{-k}(B(0,R))$ contient c et, d'après le théorème 9, par récurrence sur k, $f_c^{-k}(B(0,R))$ est un ouvert connexe et simplement connexe pour tout $k \geqslant 0$. Ainsi, les $\overline{f_c^{-k}(B(0,R))}$ sont des fermés bornés connexes et, d'après le lemme 2, leur intersection est également un fermé connexe. **cqfd**

4.3. *Poussière de Cantor*

Définition 5. *Notons Λ l'espace métrique $(\{0;1\}^{\mathbb{N}}, d_\Lambda)$ avec, pour toutes $(x_n), (y_n) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$:*

$$d_\Lambda((x_n),(y_n)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}|x_n - y_n|$$

Nous dirons qu'un ensemble $\Omega \subset \mathbb{C}$ est une ***poussière de Cantor*** *s'il est homéomorphe à Λ.*

Tout sous-ensemble connexe de Λ est vide ou réduit à un point. En effet, si $L \subset \Lambda$ est connexe, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $L \cap \{(x_n)_n | x_i = 0\}$ et $L \cap \{(x_n)_n | x_i = 1\}$ sont deux fermés disjoints de L, d'union L. L'un des deux est vide. On en déduit que, si $(x_n)_n$ et $(x'_n)_n$ sont des éléments de L, $x_i = x'_i$ pour tout i et L est donc réduit à un point s'il n'est pas vide.

Les composantes connexes d'une poussière de Cantor Ω sont donc également réduites à des points. En particulier, une poussière de Cantor est nécessairement d'intérieur vide dans $\mathbb{C}$.

Théorème 12. *Si K_{f_c} ne contient pas* 0*, K_{f_c} est une poussière de Cantor.*

Démonstration Soit $k_0 = \min\{k \in \mathbb{N}^* | 0 \notin f_c^{-k}(B(0,R))\}$. D'après le théorème 9, $f_c^{-k}(B(0,R))$ est un ouvert connexe et simplement connexe pour tout $k < k_0$. Notons $\Omega = f_c^{-(k_0-1)}(B(0,R))$. C'est un ouvert connexe simplement connexe de $\mathbb{C}$ ne contenant pas c ; on peut lui appliquer les résultats du paragraphe 3.3.

Soient Ω_0 et Ω_1 les deux ouverts connexes simplements connexes disjoints tels que $f_c^{-1}(\Omega) = \Omega_0 \cup \Omega_1$. Pour $i = 0, 1$, soit $g_i : \Omega \to \Omega_i$ la réciproque (holomorphe) de $f_{c\,|\Omega_i}$.

Pour tout sous-ensemble E de Ω, $f_c^{-1}(E) = g_0(E) \cup g_1(E)$. De plus, $g_0(\Omega)$ et $g_1(\Omega)$ sont inclus dans Ω ; leurs images par les transformations g_0 et g_1 sont donc bien définies et, par récurrence, pour tout $n \geqslant 0$:

$$f_c^{-(n+1)}(\Omega) = \bigcup_{i_0,\ldots,i_n \in \{0,1\}} g_{i_0}(\ldots(g_{i_n}(\Omega))).$$

Pour toute suite $(i_n) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, posons $I((i_n)_n) = \bigcap_{n \geqslant 0} g_{i_0}(\ldots(g_{i_n}(\Omega)))$.

Lemme 3. *Les $I((i_n)_n)$ sont disjoints deux à deux.*

Démonstration Soient (i_n) et (i'_n) distinctes. Soit n_0 tel que $i_{n_0} \neq i'_{n_0}$. Comme $g_{i_{n_0}}(\Omega)$ et $g_{i'_{n_0}}(\Omega)$ sont disjoints (il s'agit de Ω_0 et Ω_1) et comme $g_{i_{n_0}}(\Omega) = f_c^{n_0}(g_{i_0}(\ldots(g_{i_{n_0}}(\Omega))))$ et $g_{i'_{n_0}}(\Omega) = f_c^{n_0}(g_{i'_0}(\ldots(g_{i'_{n_0}}(\Omega))))$, $g_{i_0}(\ldots(g_{i_{n_0}}(\Omega)))$ et $g_{i'_0}(\ldots(g_{i'_{n_0}}(\Omega)))$ sont également disjoints. Puisque $I((i_n)) \subset g_{i_0}(\ldots(g_{i_{n_0}}(\Omega)))$ et $I((i'_n)) \subset g_{i'_0}(\ldots(g_{i'_{n_0}}(\Omega)))$, $I((i_n)) \cap I((i'_n)) = \emptyset$. **cqfd**

Lemme 4. *Pour toute $(i_n)_n \in \{0;1\}^{\mathbb{N}}$, $I((i_n)_n)$ est un singleton.*

Démonstration Soit $\phi : \Omega \to D$ une transformation conforme ; une telle fonction existe, d'après le théorème de Riemann. Nous pouvons alors définir une distance de Poincaré sur Ω par :

$$\forall z, z' \in \Omega \qquad d_\Omega(z,z') = d(\phi(z), \phi(z')).$$

où d est la distance définie dans la première partie.

Puisque $\overline{f_c^{-1}(\Omega)} \subset \Omega$, comme nous l'avons vu au début du paragraphe 4.2, et puisque g_1 et g_2 sont holomorphes, d'après le théorème 6, on dispose d'un réel $\alpha \in [0;1[$ tel que g_1 et g_2 sont α-lipschitziennes pour d_Ω.

Soit (i_n) un élément quelconque de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Montrons que $I((i_n))$ est un singleton. De la même façon qu'au paragraphe 4.2 :

$$I((i_n)) = \bigcap_{n \geqslant 0} \overline{g_{i_0}(\ldots(g_{i_n}(\Omega)))}.$$

En effet, $I((i_n)) \subset \bigcap\limits_{n\geqslant 0} \overline{g_{i_0}(...(g_{i_n}(\Omega)))}$. Pour tout $n \geqslant 0$, $\overline{g_{i_0}(...(g_{i_n}(\Omega)))} \subset g_{i_0}(...(\overline{g_{i_n}(\Omega)}))$, puisque $g_{i_0} \circ ... \circ g_{i_{n-1}}$ est continue et $\overline{g_{i_n}(\Omega)}$ est compact. De plus, $\overline{g_{i_n}(\Omega)} \subset \overline{f_c^{-1}(\Omega)} = \overline{f_c^{-k_0}(B(0,R))} \subset f_c^{-(k_0-1)}(B(0,R)) = \Omega$ donc, pour tout n, $\overline{g_{i_0}(...(g_{i_n}(\Omega)))} \subset g_{i_0}(...(g_{i_{n-1}}(\Omega)))$ et $\bigcap\limits_{n\geqslant 0} \overline{g_{i_0}(...(g_{i_n}(\Omega)))} \subset I((i_n))$.

Ainsi, $I((i_n))$ est une intersection de compacts emboîtés de Ω, c'est donc un ensemble non-vide. Montrons qu'il ne contient qu'un seul point.

Notons D_1 et D_2 les diamètres respectifs de $\overline{\Omega_0}$ et $\overline{\Omega_1}$ au sens de d_Ω et posons $D_m = \max(D_1, D_2)$. Pour tout n, le diamètre de $g_{i_0}(...(g_{i_n}(\Omega)))$ est inférieur ou égal à $\alpha^n D_m$. Puisque $\alpha < 1$, ce diamètre tend vers 0. Donc $I((i_n))$ est un singleton. **cqfd**

Lemme 5.

$$K_{f_c} = \bigcup_{(i_n)_n \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}} I((i_n)_n).$$

Démonstration Soit $x \in K_{f_c}$. Pour tout n, x appartient à $f_c^{-(n+1)}(\Omega) = \bigcup\limits_{i_0,\dots,i_n \in \{0,1\}} g_{i_0}(...(g_{i_n}(\Omega)))$ donc, pour tout n, il existe $i_0^n, ..., i_n^n$ tels que $x \in g_{i_0^n}(...(g_{i_n^n}(\Omega)))$. Pour k fixé, les $(i_k^n)_{n\geqslant k}$ ne dépendent pas de n car $x \in g_{i_0^n}(...(g_{i_n^n}(\Omega))) \cap g_{i_0^{n+1}}(...(g_{i_n^{n+1}}(g_{i_{n+1}^{n+1}}(\Omega)))) \neq \emptyset$, ce qui implique que $i_k^n = i_k^{n+1}$ pour tout $k \leqslant n$. Donc $x \in I((i_n^n)_n)$.

Réciproquement, si $x \in I((i_n))$ pour une certaine (i_n), $x \in g_{i_0}(...(g_{i_k}(\Omega))) \subset f_c^{-(k+1)}(\Omega)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ donc $x \in \bigcap\limits_{k\geqslant 0} f_c^{-k}(\Omega) = K_{f_c}$. **cqfd**

Achevons maintenant la démonstration du théorème 12.

Soit : $F : \Lambda \to K_{f_c}$ telle que, pour toute $(i_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Lambda$, $F((i_n))$ est l'unique point du singleton $I((i_n))$.

D'après les lemmes précédents, F est une bijection. Il suffit de montrer qu'elle est continue et que sa réciproque est continue. La distance de Poincaré et la distance usuelle engendrent la même topologie sur Ω (car c'est le cas sur le disque unité : pour toute suite $(x_n) \in D^{\mathbb{N}}$ et tout $x_\infty \in D$, $d(x_n, x_\infty) \to 0$ si et seulement si $|x_n - x_\infty| \to 0$). Il suffit donc de montrer la continuité de F et F^{-1} pour la distance de Poincaré restreinte à K_{f_c}.

Montrons d'abord que F est continue. Soit $\epsilon > 0$ quelconque. Définissons D_m et α comme au cours de la démonstration du lemme 4. Pour tout $(n+1)$-uplet $(i_0, ..., i_n)$,

$$\text{diam } g_{i_0}(...(g_{i_n}(\Omega))) \leqslant \alpha^n D_m \to 0.$$

Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\alpha^N D_m < \epsilon$. Alors, pour toutes suites (i_n) et (i'_n) telles que $d_\Lambda((i_n), (i'_n)) < 1/2^N$, $d_\Omega(F((i_n)), F((i'_n))) < \epsilon$: pour tout $n \leqslant N$, $i_n = i'_n$ donc $F((i_n))$ et $F((i'_n))$ appartiennent tous deux à $g_{i_0}(...(g_{i_n}(\Omega)))$, qui est de diamètre inférieur à ϵ.

Puisqu'une bijection continue entre deux compacts est nécessairement de réciproque continue et puisque Λ est compact, F^{-1} est continue. Ainsi, la fonction F est un homéomorphisme et K_{f_c} est une poussière de Cantor. **cqfd**