CORRECTED

Université Paris-Dauphine — Année 2020-2021

L3 - Statistical modelling

Last quiz of 06 December, 2020

This exercice requires you tick the one and unique correct answer.

Question 1 Soit $X_1, \ldots, X_n$ un échantillon iid Poisson $\mathcal{P}(\theta)$ avec $\theta > 0$. L'UMVUE (estimateur sans biais uniformément de variance minimale) de $\exp(-\theta)$ est

☐ $1/n \sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}_0(X_i)$
☐ $\bar{X} \exp(-2\bar{X})/n$
■ $(1 - n^{-1})^{n\bar{X}}$
☐ $1/n \sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}_1(X_i)$

Question 2 Étant donné $X_1, \ldots, X_n$ un échantillon iid de loi $\mathcal{E}(\lambda)$, on observe $(Z_1, \ldots, Z_n) = (\mathbb{I}(X_1 \leq \delta), \ldots, \mathbb{I}(X_n \leq \delta))$, avec δ connu. Si $z_1 = 1$ et $(z_2, \ldots, z_n) = (0, \ldots, 0)$, l'estimateur du maximum de vraisemblance de λ est donné par

☐ $\hat{\lambda} = 0$
■ $\hat{\lambda} = -\log\{\frac{n-1}{n}\}/\delta$
☐ $\hat{\lambda} = \frac{n+1}{\delta}$
☐ $\hat{\lambda} = \frac{(n-1)\delta}{n}$
☐ $\hat{\lambda} = \frac{\log\{\delta\}}{n-1}$

Question 3 Etant donné un vecteur aléatoire $(X_1, \ldots, X_n)$ de fonction de répartition $F(x) = 1 - \exp\{-\alpha x^2\}$ sur $\mathbb{R}^+$, avec $\alpha > 0$, l'UMVUE (estimateur sans biais uniformément de variance minimale) de $\sqrt{\alpha}$ est

☐ $(n - 1/2)/\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)^{-1/2}$
☐ $n/\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)^{-1/2}$
■ $\Gamma(n)/\Gamma(n - 1/2)\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)^{-1/2}$
☐ inexistant

Question 4 Pour $X_1, \ldots, X_n$ un échantillon *i.i.d.* de loi de Cauchy $\mathcal{C}(\mu, 1)$, la statistique d'ordre $(X_{(1)}, \ldots, X_{(n)})$

■ est minimale exhaustive mais pas complète
☐ n'est ni minimale ni complète
☐ est non-minimale mais complète
☐ est minimale exhaustive et complète

Question 5 Si X_1, X_2 sont iid de densité $\exp\{-|x - \mu|\}/2$ sur $\mathbb{R}$, avec $\mu \in \mathbb{R}$, l'estimateur du maximum de vraisemblance de μ est

☐ $(X_1 + X_2)/2$
☐ $(X_{(1)} + X_{(2)})/2$
☐ $\min\{X_1, X_2\}$
■ toute valeur dans $[X_{(1)}, X_{(2)}]$

Question 6 Si $X_1, \ldots, X_n$ et $Y_1, \ldots, Y_n$ sont des échantillons indépendants de lois $\mathcal{E}(\lambda)$ et $\mathcal{E}(1/\lambda)$, respectivement, l'estimateur du maximum de vraisemblance de λ associé à l'ensemble des observations $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ est donné par

- [ ] $\hat{\lambda} = \sqrt{\bar{x}_n/\bar{y}_n}$
- [ ] $\hat{\lambda} = \sqrt{\bar{x}_n\bar{y}_n}$
- [x] $\hat{\lambda} = \sqrt{\bar{y}_n/\bar{x}_n}$
- [ ] $\hat{\lambda} = (\bar{x}_n - \bar{y}_n)/2$

Question 7 Soit $X_1, \ldots, X_n$ un échantillon iid $\mathcal{P}(\theta)$ L'UMVUE de $\exp(-\theta)$ est

- [ ] $(1 - \exp\{-\bar{X}\}) \exp\{-\bar{X}\}$
- [ ] $\bar{X} \exp(-2\bar{X})/n$
- [ ] ${}^1/_n \sum_{i=1}^n \mathbb{I}_0(X_i) X_i$
- [ ] ${}^1/_n \sum_{i=1}^n \mathbb{I}_0(X_i)$
- [ ] $\exp\{-\bar{X}\}$
- [x] $(1 - n^{-1})^{n\bar{X}}$

Question 8 Pour l'échantillon $\mathbf{y}$ defini par

$$\mathbf{y} = (\zeta_1 x_1, \ldots, \zeta_n x_n) \qquad \zeta_i \sim \mathcal{B}(p) \quad x_i \sim \mathcal{T}_3(\mu, \tau)$$

(loi de Student à 3 degrés de liberté), une statistique echaustive est

- [ ] $(\sum_{i=1}^n \zeta_i, \sum_{i=1}^n x_i)$
- [ ] $(\sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{y_i=0}, \sum_{i=1}^n y_i)$
- [x] $(\sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{y_i=0}, \{y_i; y_i \neq 0\})$
- [ ] $\sum_{i=1}^n y_i$

Question 9 Pour X_1, X_2, X_3 iid $\mathcal{B}(\lambda)$, une statistique non-exhaustive de λ est

- [x] $X_1 X_2 X_3$
- [ ] $X_1 + 2X_2 + 4X_4$
- [ ] $3\bar{X}_n$
- [ ] $X_1^2 + X_2^2 + X_3^2$

Question 10 Si $X_1, \ldots, X_n$ un échantillon *i.i.d.* tel que $\mathbb{P}(X_i = 0) = p$ et $\mathbb{P}(X_i > x) = (1 - p)e^{-\lambda x}$, $(x > 0)$, une statistique exhaustive pour ce modèle est

- [x] $(\sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{X_i=0}, \sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{X_i>0} X_i)$
- [ ] $\sum_{i=1}^n X_i / \sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{X_i>0}$
- [ ] $(\sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{X_i=0}, \sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{X_i>0})$
- [ ] $\bar{X}_n$

Question 11 Soit $X_1, \ldots, X_n$ un échantillon *i.i.d.* de loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$, pour lequel on observe uniquement les statistiques d'ordre $Y = (X_{(1)}, \ldots, X_{(r)})$ pour $r < n$. Une statistique exhaustive de λ est

- [x] $s = \sum_{i=1}^r y_i + (n - r)y_r$
- [ ] $s = \sum_{i=1}^r y_i$

Question 12 Étant donné $X_1, \dots, X_n$, échantillon iid de loi $\mathcal{E}(\lambda)$, on construit $(Z_1, \dots, Z_n) = (\mathbb{I}(X_1 \geq \delta), \dots, \mathbb{I}(X_n \geq \delta))$, avec δ connu. Si la réalisation $(z_1, \dots, z_n)$ vaut $(1, \dots, 1)$, l'estimation du maximum de vraisemblance de λ fondée sur les z_i vaut :

- [ ] $\hat{\lambda} = 1/\bar{x}$
- [ ] $\hat{\lambda} = \delta$
- [ ] $\hat{\lambda} = 1$
- [ ] $\hat{\lambda} = 1/\delta$
- [ ] $\hat{\lambda} = \bar{x}$
- [x] $\hat{\lambda} = 0$

Question 13 Etant donné un vecteur aléatoire $(X_1, \dots, X_n)$ de densité de Cauchy $f(x; \mu) \propto (1 + (x - \mu)^2)^{-1}$, l'estimateur du maximum de vraisemblance de μ est

- [ ] inexistant
- [ ] la moyenne empirique des X_i
- [ ] la médiane empirique des X_i
- [ ] $(X_{(1)} + X_{(n)})/2$
- [x] une racine d'un polynôme de degré $2n - 1$

Question 14 Soit $X_1, \dots, X_n$ un échantillon iid Poisson $\mathcal{P}(\theta)$. La borne de Cramèr–Rao d'un estimateur sans biais de $\exp(-\theta)$ est

- [ ] $\theta^{-1} \exp(2\theta)/n$
- [ ] $(1 - \exp\{-\theta\}) \exp(-\theta)/n$
- [x] $\theta \exp(-2\theta)/n$
- [ ] $(1 - \exp\{-\theta\})^2 \exp(-2\theta)/n$