MCQ 23 November 2020

This exercise requires you tick the one and unique correct answer.

Question 1 Si $X_1, \dots, X_{2n+1}$ sont iid de densité $\exp\{-|x - \mu|\}/2$ sur $\mathbb{R}$, avec $\mu \in \mathbb{R}$, l'estimateur du maximum de vraisemblance est

- la médiane de $X_1, \dots, X_{2n+1}$ et exhaustive
 la médiane de $X_1, \dots, X_{2n+1}$ et non-exhaustive
 la moyenne de $X_1, \dots, X_{2n+1}$ et non-exhaustive
 la moyenne de $X_1, \dots, X_{2n+1}$ et exhaustive

Question 2 Si $X_1, \dots, X_n$ est un échantillon iid de densité $f(x; \beta) = (\beta + 1)x^\beta \mathbb{I}_{]0,1[}(x)$, un estimateur sans biais de $\beta/\beta+1$ est donné par

- $1 + (n - 1) (\sum_{i=1}^n \log(X_i))^{-1}$
 $1 + n (\sum_{i=1}^n \log(X_i))^{-1}$
 $1 + (n + 1) (\sum_{i=1}^n \log(X_i))^{-2}$
 $1 + n^{-1} (\sum_{i=1}^n \log(X_i))$

Question 3 Soit $X_1, \dots, X_n$ un échantillon iid Poisson $\mathcal{P}(\theta)$. La borne de Cramér–Rao d'un estimateur sans biais de $\exp(-\theta)$ est

- $\theta^{-1} \exp(2\theta)/n$
 $(1 - \exp\{-\theta\})^2 \exp(-2\theta)/n$
 $(1 - \exp\{-\theta\}) \exp(-\theta)/n$
 $\theta \exp(-2\theta)/n$

Question 4 Etant donné $X_1, \dots, X_n$ est un échantillon iid de loi $\mathcal{Beta}(1, \lambda)$, l'estimateur du maximum de vraisemblance de $\lambda > 0$ associé à l'échantillon $(x_1, \dots, x_n)$ est donné par

- $\hat{\lambda} = -n / \sum_{i=1}^n \log\{1 - x_i\}$
 $\hat{\lambda} = -\frac{1}{n} \prod_{i=1}^n \log(1 - x_i)$
 $\hat{\lambda} = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log\{1 - x_i\}$
 $\hat{\lambda} = 1/1 - \bar{x}$

Question 5 Étant donnés $X_1, \dots, X_n$ formant un échantillon iid de loi de Pareto $\mathcal{Pa}(\alpha, \mu)$, où α est fixe, l'estimateur $\hat{\varrho}$ du maximum de vraisemblance de la probabilité $\varrho = \mathbb{P}(X \in [2\mu, 4\mu])$ est donné par :

- $2^{-\alpha} - 4^{-\alpha}$
 $\frac{(n-1)\alpha}{n(\alpha+1)}$
 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{[2,4]}(X_i/\bar{X})$
 $\log\{\frac{n+1}{n}\}/1 + \alpha$

Question 6 Si $X_1, \dots, X_n$ et $Y_1, \dots, Y_n$ sont des échantillons indépendants de lois $\mathcal{Exp}(\lambda)$ et $\mathcal{Exp}(1/\lambda)$, respectivement, l'estimateur du maximum de vraisemblance de λ associé à l'ensemble des observations $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ est donné par

- $\hat{\lambda} = (\bar{x}_n - \bar{y}_n)/2$
 $\hat{\lambda} = \sqrt{\bar{y}_n/\bar{x}_n}$
 $\hat{\lambda} = \sqrt{\bar{x}_n\bar{y}_n}$
 $\hat{\lambda} = \sqrt{\bar{x}_n/\bar{y}_n}$

Question 7 Soit $X_1, \dots, X_n$ un échantillon iid Poisson $\mathcal{P}(\theta)$ avec $\theta > 0$. L'UMVUE (estimateur sans biais uniformément de variance minimale) de $\exp(-\theta)$ est

- $1/n \sum_{i=1}^n \mathbb{I}_1(X_i)$
 $1/n \sum_{i=1}^n \mathbb{I}_0(X_i)$
 $(1 - n^{-1})^{n\bar{X}}$
 $\bar{X} \exp(-2\bar{X})/n$

Question 8 Etant donné un vecteur aléatoire $(X_1, \dots, X_n)$ de fonction de répartition $F(x) = 1 - \exp\{-\alpha x^2\}$ sur $\mathbb{R}^+$, avec $\alpha > 0$, l'UMVUE (estimateur sans biais uniformément de variance minimale) de $\sqrt{\alpha}$ est

- $n / (\sum_{i=1}^n X_i^2)^{-1/2}$
 $(n - 1/2) / (\sum_{i=1}^n X_i^2)^{-1/2}$
 inexistant
 $\Gamma(n - 1/2) / \Gamma(n) (\sum_{i=1}^n X_i^2)^{-1/2}$

Question 9 Etant donné un vecteur aléatoire $(X_1, \dots, X_n)$ tel que $X_i \stackrel{\text{ind}}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma_i^2)$, où μ est inconnu et les σ_i sont supposés connus, de réalisation $(x_1, \dots, x_n)$, l'estimateur $\hat{\mu}$ du maximum de vraisemblance de μ est donné par

- $\hat{\mu} = (x_1 + \dots + x_n)/n$
 $\hat{\mu} = (\sigma_1^{-2}x_1 + \dots + \sigma_n^{-2}x_n) / (\sigma_1^{-2} + \dots + \sigma_n^{-2})$
 $\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 (x_i - \hat{\mu})^{-1} = 0$
 $\hat{\mu} = (\sigma_1^2x_1 + \dots + \sigma_n^2x_n) / (\sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2)$