Université Paris-Dauphine Année 2015-2016
L3 - Statistique (1) : Estimation

**Examen Partiel Octobre 2015 - Durée 2h00 - Sans document**

# Exercice 1 (8 pts)

On considère une variable aléatoire $X$ admettant une densité de la forme

$$f_X(x;\beta) = kx^{\beta}\mathbb{I}_{]0,1]}(x)\,.$$

Soit $X_1, \ldots, X_n$ un $n$-échantillon de $X$.

**1 (2 pts)** Donner la condition sur $\beta$ pour que $f_X$ soit intégrable. Déterminer $k$ en fonction de $\beta$. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

**2 (3 pts)** Montrer que $-\log(X)$ suit une loi standard dont on précisera le paramètre. En déduire que $\tilde{\beta}_n = -1 - (n-1)\left(\sum_{i=1}^n \log(X_i)\right)^{-1}$ est un estimateur de $\beta$ d'espérance $\beta$.

**3 (2 pts)** On cherche à estimer la quantité $\mathbb{P}(X \leq 0.5)$. Calculer la fonction de répartition associée à $f_X$, notée $F_X$, et en déduire la valeur de cette probabilité en fonction de $\beta$. Donner l'estimateur bootstrap de $\mathbb{P}(X \leq 0.5)$.

**4 (1 pts)** On suppose qu'un seul des $n$ $x_i$ est inférieur ou égal à 0.5. Quel est l'estimateur bootstrap de $\mathbb{P}(X \leq 0.5)$ ? Calculer la variance bootstrap associée à cet estimateur.

# Exercice 2 (4 pts)

Le but de cet exercice est de montrer la formule de Stirling. Soient $X_1, \ldots, X_n$ une suite iid de variables aléatoires suivant une loi exponentielle de paramètre 1. On rappelle la densité d'une variable exponentielle de paramètre $\lambda$ :

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}\mathbb{I}_{x>0}.$$

**1 (1 pts)** Montrer que la densité de $Z = \sum_{i=1}^n X_i$ est

$$f_Z(t) = e^{-t}\frac{t^{n-1}}{(N-1)!}\mathbb{I}_{t>0}$$

**2 (2 pts)** On pose

$$S = \frac{Z-n}{\sqrt{n}}.$$

Montrer (en utilisant la question 1) que lorsque $n$ tend vers l'infini

$$\mathbb{P}\left(S \in [0,1/4]\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{n+1/2}e^{-n}}{n!}\int_0^{1/4} e^{-x^2/2}dx$$

*On rappelle le développement limité du logarithme* $\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + o(t^3)$

**3 (1 pts)** A l'aide du théorème central limite, en déduire la formule de Stirling

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}$$

## Exercice 3 (3 pts)

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires iid de loi $\chi^2_k$. On rappelle les moments d'une loi $\chi^2_k$

$$\mathbb{E}(X_1) = k, \quad \mathbb{V}(X_1) = 2k$$

On note $\bar{X}_n = n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i$

**1 (1 pts)** Soit $g : x \mapsto \sqrt{2x}$, montrer que

$$\sqrt{n}(g(\bar{X}_n) - g(k)) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

et trouver $\sigma^2$.

**2 (2 pts)** Trouver un intervalle $I_\alpha$ ne dépendant que de $X_1, \dots, X_n$, $n$ et le quantile de la loi normale $\phi^{-1}(1 - \alpha/2)$ tel que

$$\mathbb{P}(n \in I_\alpha) = 1 - \alpha$$

*On rappelle que* $\phi^{-1}(1-\alpha/2) = -\phi^{-1}(\alpha/2)$ *et est tel que*

$$\int_{-\infty}^{\phi^{-1}(1-\alpha/2)} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx = 1 - \alpha/2$$

## Exercice 4 ( pts)